Mathematics Library

JUN 24

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 180

Heft 3

Ausgegeben am 12. Mai 1939

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1939

Band 180. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Nöbeling, Georg, Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung	129
Lemke, H., Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung. . . .	141

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung.

Von *Georg Nöbeling* in Erlangen.

Einleitung.

In der Juelschen Geometrie versteht man unter der Ordnung einer Menge A eines Raumes R in bezug auf ein System S von Teilmengen C des Raumes R die größte Mächtigkeit der Durchschnitte AC von A mit den Mengen des Systems S, sofern diese größte Mächtigkeit existiert; bestehen die Durchschnitte AC, soweit sie nicht leer sind, aus je endlich vielen Punkten, so nennt man A von endlicher Ordnung bzgl. S; die Mengen C heißen die Ordnungscharakteristiken[1]). Es handelt sich in der Juelschen Geometrie vor allem darum, aus gewissen Voraussetzungen über den Raum R, über die Charakteristiken C und die Ordnung von A sonstige Eigenschaften von A zu folgern. Ein Satz dieser Art lautet folgendermaßen: Ist das Kontinuum K des euklidischen R_k von endlicher Ordnung bzgl. eines Hyperebenenbüschels, so ist K die abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen Bogen der Ordnung Eins, von denen jeder nach Tilgung seiner Endpunkte in K offen ist[2]).

Im folgenden soll dieser Satz verallgemeinert werden. Zuerst beweisen wir den

Darstellungssatz I. *Die kompakte Teilmenge A des kartesischen R_k sei von endlicher Ordnung bzgl. einer den R_k überdeckenden Parallelschar S von $(k-n)$-dimensionalen Ebenen des R_k $(1 < n < k)$. Dann ist A höchstens n-dimensional und darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge A' und der in A abgeschlossenen Hülle A'' einer (möglicherweise leeren) Summe von höchstens abzählbar vielen, in A'' offenen, paarweise fremden n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ der Ordnung Eins bzgl. S; die Menge $A - \sum_i Z_i$ ist höchstens $(n-1)$-dimensional; die Zellen Z_i treten dann und nur dann auf* (d. h. also: A ist dann und nur dann genau n-dimensional), *wenn die Menge aller zu A nicht fremden Ebenen aus S eine in S offene Teilmenge enthält*[3])[4]).

---

[1]) Zum Begriff der Ordnung vgl. Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), S. 1—53, sowie die in Fußnote [8]) genannte Arbeit und die dort angegebene Literatur; außerdem noch: G. Aumann, Konforme Abbildungen mit Ordnungseigenschaften, Deutsche Math. **2** (1937), S. 574-576; Über lokale Ordnungseigenschaften der konformen Abbildungen, Journ. f. d. r. u. a. Math. **178** (1938), S. 187—191. M. Linsman, Introduction à une théorie abstraite de la notion de l'ordre des figures réelles, Mémoires publ. par l'Acad. roy. de Belgique **17** (1938).

[2]) Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. **167** (1932), S. 20—39. Vgl. hierzu auch die Fußnote[4]).

[3]) Die Dimension ist immer im Sinne der mengentheoretischen Dimension gemeint; vgl. z. B. K. Menger, Dimensionstheorie, Leipzig 1928 (im folgenden kurz „Dimensionstheorie" zitiert). — Eine n-Zelle ist ein topologisches Bild einer n-Kugel, d. h. einer offenen n-dimensionalen Kugel des R_n.

[4]) Die Anregung zu dieser Verallgemeinerung verdankt Verf. der Lektüre eines unveröffentlichten Manuskriptes von Herrn Haupt, in welchem der obige Darstellungssatz bewiesen wird für den Fall $n = k - 1$ (vgl. Über den Begriff des Gebildes von endlicher linearer Ordnung im n-dimensionalen Raum, Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. Erlangen **69** (1937), S. 241—246). Der nachstehende Beweis verläuft analog wie der Beweis von Herrn Haupt; nur mußten tiefere topologische und dimensionstheoretische Hilfsmittel herangezogen werden.

Zusatz. Die Behauptungen des Darstellungssatzes I bleiben richtig, wenn man die Voraussetzungen folgendermaßen abschwächt. *Es sei O eine offene Teilmenge des R_k und S eine O schlicht überdeckende, stetige Schar $(k-n)$-dimensionaler Ebenen des R_k. Die Teilmenge A von O sei lokal kompakt und habe mit jeder Ebene E aus S einen isolierten Durchschnitt*[5]).

Der Darstellungssatz I liefert einen analogen Satz über *Abbildungen endlicher Ordnung*, d. h. Abbildungen, bei welchen jeder Bildpunkt höchstens endlich viele Urbildpunkte hat. Dieser Satz lautet folgendermaßen:

Darstellungssatz II. *Der kompakte, metrische Raum A sei durch eine eindeutige, stetige Abbildung f endlicher Ordnung in den kartesischen R_n abgebildet. Dann ist A höchstens n-dimensional und darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge A' und der in A abgeschlossenen Hülle A'' einer (möglicherweise leeren) Summe von höchstens abzählbar vielen, in A'' offenen, paarweise fremden n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$, auf denen die Abbildung f topologisch ist; die Menge $A-(Z_1+Z_2+\cdots)$ ist höchstens $(n-1)$-dimensional; die n-Zellen Z_i treten dann und nur dann auf, wenn $f(A)$ eine in R_n offene Teilmenge enthält*[6]).

Die Zurückführung dieses Satzes auf den Darstellungssatz I geschieht durch *Linearisierung der Urbildmengen*, d. h. durch eine topologische Einbettung von A in einen $R_k > R_n$ derart, daß die Urbildmengen der Punkte von $f(A)$ identisch sind mit den Durchschnitten von A mit den Ebenen einer Parallelschar S von $(k-n)$-dimensionalen Ebenen des R_k.

Aus dem Darstellungssatz II ergibt sich sehr leicht, daß der Darstellungssatz I für ganz allgemeine Ordnungsbegriffe gilt; der Raum R und die Ordnungscharakteristiken C können ganz beliebig sein; zu fordern ist nur, daß die Durchschnitte AC eine stetige Zerlegung von A (in endliche Mengen) mit einer gewissen Eigenschaft sind[7]). Der Beweis wird geführt durch Konstruktion einer eindeutigen, stetigen Abbildung f endlicher Ordnung von A in den R_n. Führt man für diese Abbildung f die Linearisierung durch, welche den Darstellungssatz II auf den Darstellungssatz I zurückführt, so ergibt sich eine *Linearisierung des allgemeinen Ordnungsbegriffes* in folgendem Sinne: A wird derart in einen R_k topologisch eingebettet, daß die Durchschnitte AC von A mit den allgemeinen Ordnungscharakteristiken identisch sind mit den Durchschnitten von A mit den Ebenen einer Parallelschar von $(k-n)$-dimensionalen Ebenen des R_k.

Die Lokalisierung des Ordnungsbegriffes führt zum Begriff der homogenen Ordnung und zur Frage nach der Existenz ordnungshomogener Mengen[8]). In dieser Hinsicht liefern unsere Sätze das Ergebnis, daß für die von uns betrachteten Ordnungsbegriffe

---

[5]) Die Schar S von $(k-n)$-dimensionalen Ebenen E *überdeckt O schlicht*, wenn jeder Punkt von O in genau einer Ebene aus S liegt. S heißt *stetig*, wenn die zu einem Punkt P von O hinreichend benachbarten Punkte in Ebenen E' liegen, die zur P enthaltenden Ebene E beliebig benachbart sind. Die Menge A heißt *lokal kompakt*, wenn zu jedem Punkt P von A eine Umgebung U existiert, so daß $A\overline{U}$ kompakt ist. Eine Menge $M < R_k$ heißt (*in sich*) *isoliert*, wenn zu jedem Punkt P von M eine Umgebung U mit $MU = P$ existiert.

[6]) Vgl. hierzu E. Čech, Une nouvelle classe de continus, Fundam. Math. **18** (1932), S. 85—87.

[7]) Eine Darstellung einer kompakten Menge A als Summe paarweise fremder, abgeschlossener Teilmengen T heißt eine *stetige Zerlegung* von A, wenn aus der Konvergenz einer Folge von Punkten P^i aus A gegen einen Punkt P folgt, daß für die die Punkte P^i enthaltenden Zerlegungsmengen T^i der lim sup der Folge $\{T^i\}$ in der P enthaltenden Zerlegungsmenge T enthalten ist. Der zugehörige Zerlegungsraum Z entsteht, indem in naheliegender Weise alle in derselben Zerlegungsmenge enthaltenen Punkte identifiziert werden. Es existiert eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf Z derart, daß die Zerlegungsmengen T die Urbildmengen der Punkte von Z sind. Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, Topologie **1**, Berlin 1935, S. 95.

[8]) Vgl. Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, Monatshefte f. Math. u. Phys. **46** (1937), S. 84—92, und die dort zitierte Literatur.

eine kompakte, n-dimensionale Menge ohne in ihr offene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge nur die homogene Ordnung Eins oder Unendlich haben kann.

Der Beweis des Darstellungssatzes I.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir das Koordinatensystem des kartesischen R_k so gewählt annehmen, daß die Schar S aus allen $(k-n)$-dimensionalen Ebenen $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ besteht.

Ist die Menge A höchstens $(n-1)$-dimensional, so setzen wir $A' = A$, A'' gleich der leeren Menge und sind fertig.

Nun sei A mindestens n-dimensional. Wir bezeichnen mit π die Orthogonalprojektion von A in den durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierten $R_n < R_k$. Da nur solche Punkte von A auf denselben Punkt $(c_1, \ldots, c_n)$ des R_n projiziert werden, welche auf der gleichen Ebene $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ von S liegen, und diese Punkte eine leere oder nulldimensionale Menge bilden, ist die eindeutige, stetige Abbildung π von A in den R_n nicht dimensionserniedrigend[9]). Das Bild $A^* = \pi(A)$ von A ist als Teilmenge des R_n höchstens n-dimensional[10]); also ist auch A höchstens n-dimensional. Da der Fall, daß A höchstens $(n-1)$-dimensional ist, bereits erledigt wurde, können wir also annehmen, daß A die Dimension n besitzt.

Es sei nun A' die größte in A offene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge von A. Dann liegen in der Menge $A - A' = A''$ die Punkte, in welchen A'' die Dimension n hat, dicht; denn hätte etwa der Punkt P von A'' einen positiven Abstand d von der Menge aller Punkte von A'', in denen A'' die Dimension n hat, so wäre der Durchschnitt von A mit der offenen Kugel um P mit dem Radius d in A offen und höchstens $(n-1)$-dimensional[11]), also P ein Punkt von A', statt von A''.

Indem wir A statt A'' schreiben, genügt es also, folgendes zu zeigen:

Voraussetzung. *Die kompakte Menge A ist von endlicher Ordnung bzgl. der Parallelschar S; A ist n-dimensional und in A liegt dicht die Menge aller Punkte von A, in denen A die Dimension n hat.*

Behauptung 1. *A ist die abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen, paarweise fremden, in A offenen n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ der Ordnung Eins bzgl. S; die Menge $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ ist höchstens $(n-1)$-dimensional.*

Der Beweis dieser Behauptung 1 geht in vier Schritten vor sich.

1. Schritt. Die Behauptung 1 ergibt sich aus folgender

Behauptung 2. *In jeder Umgebung jedes Punktes von A gibt es mindestens eine n-Zelle der Ordnung Eins bzgl. S.*

Es sei nämlich diese Behauptung 2 bereits bewiesen. Wir wählen in der Projektion $A^* = \pi(A)$ von A einen beliebigen Punkt P^* und eine beliebige Umgebung U^* von P^* im R_n. Weiter sei P ein beliebiger Punkt von A mit $\pi(P) = P^*$ und U_1 die in A offene Menge aller Punkte Q von A mit $\pi(Q) < U^*$. Nach der als bereits bewiesen angenommenen Behauptung 2 enthält U_1 eine n-Zelle $\mathfrak{S}_1$ der Ordnung Eins bzgl. S; dabei können wir sofort annehmen, daß $\pi(\mathfrak{S}_1)$ eine n-Kugel K_1 ist (d. h. eine offene, n-dimensionale Kugel des R_n). Falls es nun einen nicht in $\mathfrak{S}_1$ enthaltenen Punkt $P_2 < A$ mit $\pi(P_2) < K_1$ gibt, so enthält eine Umgebung U_2 bzgl. A von P_2 nach Behauptung 2 eine n-Zelle $\mathfrak{S}_2$, die, wenn U_2 hinreichend klein ist, zu $\mathfrak{S}_1$ fremd ist und deren Projektion $\pi(\mathfrak{S}_2)$ wir sofort als eine samt Begrenzung in K_1 enthaltene n-Kugel K_2 annehmen können. Gibt es nun einen weder in $\mathfrak{S}_1$ noch in $\mathfrak{S}_2$ enthaltenen Punkt $P_3 < A$ mit $\pi(P_3) < K_2$, so liefert er analog

---

[9]) Dimensionstheorie, S. 235.

[10]) Dimensionstheorie, S. 81 und 244.

[11]) Dimensionstheorie, S. 115; A' ist ein F_σ und G_δ in A.

eine n-Zelle $\mathfrak{S}_3 < A$, die zu $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ fremd ist und deren Projektion $\pi(\mathfrak{S}_3)$ eine samt Begrenzung in K_2 enthaltene n-Kugel K_3 ist. So fahren wir fort. Dieses Verfahren muß nach endlich vielen Schritten abbrechen. Denn andernfalls gäbe es zu jedem Punkt $(c_1, \ldots, c_n)$ des nicht leeren Durchschnittes der unendlich vielen n-Kugeln K_i $(i = 1, 2, \ldots)$ in jeder der paarweise fremden n-Zellen $\mathfrak{S}_i$ einen Punkt Q_i mit $\pi(Q_i) = (c_1, \ldots, c_n)$. Dies würde aber heißen, daß die Ebene $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ von S mit A die unendlich vielen Punkte Q_i gemein hat, im Widerspruch zur Endlichkeit der Ordnung von A bzgl. S.

Damit ist bewiesen: In jeder Umgebung U^* jedes Punktes P^* von $A^* = \pi(A)$ gibt es eine n-Kugel L mit der Eigenschaft, daß das Urbild von L bzgl. der Projektion π die Summe endlich vieler paarweise fremder n-Zellen $< A$ der Ordnung Eins bzgl. S ist, von denen jede durch π topologisch auf ganz L abgebildet wird. Bezeichnen wir mit O die Summe aller n-Kugeln L mit der eben genannten Eigenschaft, so ist A^* die abgeschlossene Hülle der im R_n offenen Menge O. Also kann man A^* darstellen als Summe von abzählbar vielen paarweise fremden n-Kugeln L_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit der genannten Eigenschaft und einer in A^* nirgends dichten, also auch im R_n nirgends dichten und daher[10]) höchstens $(n-1)$-dimensionalen abgeschlossenen Menge N. Die abzählbar vielen, paarweise fremden n-Zellen $< A$, welche die n-Kugeln L_i zu π-Bildern haben (und zwar je endlich viele dieselbe L_i), bezeichnen wir in irgendeiner Reihenfolge mit $Z_1, Z_2, \ldots$. Da jedes L_i in A^* offen ist, ist auch das π-Urbild von L_i in A offen; dieses Urbild ist aber die Summe endlichvieler der paarweise fremden Z_j; mithin ist jedes dieser Z_j in A offen. Schließlich behaupten wir: A ist die abgeschlossene Hülle H der Summe $Z_1 + Z_2 + \cdots$. Nehmen wir an, ein Punkt P von A hätte von H einen positiven Abstand d. Dann ist $\pi(P)$ in $A^* - (L_1 + L_2 + \cdots) = N$ enthalten. Nun ist N, wie oben bemerkt, höchstens $(n-1)$-dimensional. Also ist, da π die Dimension von $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ nicht erniedrigt, auch das Urbild $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ von N höchstens $(n-1)$-dimensional. Mithin ist der Durchschnitt von A mit der offenen, k-dimensionalen Kugel um P mit dem Radius d höchstens $(n-1)$-dimensional, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß in A die Menge aller Punkte, in denen A die Dimension n hat, dicht ist. Damit ist die Behauptung 1 auf die Behauptung 2 zurückgeführt.

2. Schritt. Wir wollen die Behauptung 2 auf eine Behauptung 3 zurückführen, zu deren Formulierung wir folgende Begriffe einführen. Wir nennen einen Punkt P von A einen *schwachen Schnittpunkt* von A bzgl. der Parallelschar S, wenn es zu jeder Umgebung U von P eine positive Zahl $\varepsilon = \varepsilon(P, U)$ gibt derart, daß jede Ebene E aus S, die von P einen Abstand $< \varepsilon$ hat, mit A mindestens einen in U enthaltenen Punkt gemein hat. Wir nennen einen Punkt Q von A einen *Schnittpunkt* von A bzgl. S, wenn es zu jeder Umgebung V von Q eine positive Zahl $\delta = \delta(Q, V)$ gibt derart, daß jede Ebene aus S, die von Q einen Abstand $< \delta$ hat, mindestens einen in V enthaltenen schwachen Schnittpunkt von A bzgl. S enthält. — Die Behauptung 3 lautet nun:

Behauptung 3. *In jeder Umgebung jedes Punktes von A gibt es mindestens einen Schnittpunkt von A bzgl. S.*

Nehmen wir diese Behauptung 3 als bereits bewiesen an. Es sei H_0 ein beliebiger Punkt von A und W eine Umgebung von H_0; zu zeigen ist die Existenz einer n-Zelle der Ordnung Eins bzgl. S in AW. Nach Behauptung 3 enthält AW einen Schnittpunkt Q_1 bzgl. S; es existiert also eine in W enthaltene k-Kugel V_1 mit dem Mittelpunkt Q_1 und eine positive Zahl δ_1 derart, daß jede Ebene E aus S, die von Q_1 einen Abstand $< \delta_1$ hat (wir wollen jede solche Ebene mit $E(Q_1, \delta_1)$ bezeichnen), einen in V_1 enthaltenen schwachen Schnittpunkt bzgl. S von A enthält. Hat jede dieser Ebenen $E(Q_1, \delta_1)$ mit AV_1 höchstens, also genau einen Punkt gemein, so bilden diese Punkte eine n-Zelle der Ordnung Eins bzgl. S; denn dann ist die Projektion π für diese Punktmenge eine einein-

deutige, stetige, also topologische Abbildung auf eine n-Kugel des R_n; in diesem Fall sind wir also schon fertig. Andernfalls gibt es unter den Ebenen $E(Q_1, \delta_1)$ eine Ebene E_1, die mit $A V_1$ mehrere Punkte gemein hat. Unter diesen Punkten aber gibt es, da Q_1 ein Schnittpunkt bzgl. S ist, mindestens einen schwachen Schnittpunkt bzgl. S, etwa P_1. Ist H_1 ein zweiter, von P_1 verschiedener Punkt von $E_1 A V_1$, so sei U_1 eine so kleine k-Kugel um P_1, daß ihre abgeschlossene Hülle in V_1 enthalten ist und von H_1 einen positiven Abstand hat; dann gibt es, da P_1 ein schwacher Schnittpunkt bzgl. S ist, ein positives ε_1 derart, daß *jede Ebene* $E(P_1, \varepsilon_1)$ *mit* $A U_1$ *einen nicht leeren Durchschnitt hat.* — Jetzt wenden wir auf H_1 genau dieselben Schlüsse an wie auf H_0. Wir erhalten dann zunächst einen auf einer Ebene $E(P_1, \varepsilon_1)$ gelegenen Schnittpunkt Q_2 bzgl. S, der von U_1 einen positiven Abstand besitzt. Ist Q_2 in einer n-Zelle $< A$ der Ordnung Eins bzgl. S enthalten, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es auf einer Ebene $E(Q_2, \delta_2)$, die bei hinreichend kleinem δ_2 zugleich eine Ebene $E(P_1, \varepsilon_1)$ ist, mindestens zwei Punkte von A, welche beide von U_1 einen positiven Abstand besitzen und von denen mindestens einer, er heiße P_2, ein schwacher Schnittpunkt bzgl. S ist; der zweite heiße H_2. Zu P_2 gibt es eine k-Kugel U_2 mit positivem Abstand von U_1 und eine positve Zahl ε_2 derart, daß *jede Ebene* $E(P_2, \varepsilon_2)$ *eine Ebene* $E(P_1, \varepsilon_1)$ *ist und mit* $A U_2$ *einen nicht leeren Durchschnitt hat.* So fahren wir fort. Dieses Verfahren muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, indem es eine n-Zelle der Ordnung Eins liefert. Denn andernfalls würde es zu einer Ebene E aus S führen, die mit jeder der unendlich vielen paarweise fremden, abgeschlossenen Umgebungen $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots$ je mindestens einen in A enthaltenen Punkt gemein hätte, im Widerspruch zur Endlichkeit der Ordnung von A bzgl. S. — Damit ist die Behauptung 2 auf die Behauptung 3 zurückgeführt.

3. Schritt. An Stelle der Behauptung 3 genügt der Beweis der

Behauptung 4. *Ist die kompakte, n-dimensionale Menge B des R_k von endlicher Ordnung bzgl. der Parallelschar S, so enthält B mindestens einen Schnittpunkt von B bzgl. S.*

Es sei nämlich P ein beliebiger Punkt der Menge A und U eine Umgebung von P. Zu zeigen ist die Existenz eines Schnittpunktes von A bzgl. S in U. Es sei V eine Umgebung von P, deren abgeschlossene Hülle in U enthalten ist. Dann ist $B = A \overline{V}$ kompakt und n-dimensional, da die Menge der Punkte von A, in denen A die Dimension n hat, in A dicht ist. Enthält nun B einen Schnittpunkt von B bzgl. S, so ist derselbe umso mehr ein Schnittpunkt von A bzgl. S.

4. Schritt. Indirekter Beweis der Behauptung 4.

Wir konstruieren zunächst eine topologische Abbildung φ des R_k auf sich.

Es sei $P = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ein Punkt von B. Dann hat die $(k - n)$-dimensionale Ebene $E = (x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n)$ durch P mit B nur endlich viele Punkte gemein. Also existiert eine beliebig kleine positive Zahl ϱ derart, daß die abgeschlossene Umgebung

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n, \quad |x_{n+1} - \xi_{n+1}| + \cdots + |x_k - \xi_k| \leqq \varrho$$

von P in E mit B nur den Punkt P gemein hat. Insbesondere ist ihre Begrenzung

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n, \quad |x_{n+1} - \xi_{n+1}| + \cdots + |x_k - \xi_k| = \varrho$$

zu B fremd. Mithin existiert eine positive Zahl $\varrho' < \varrho$ und eine beliebig kleine positive Zahl σ derart, daß die Menge M aller Punkte $(x_1, \ldots, x_k)$ mit

$$|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n| \leqq \sigma, \quad \varrho' \leqq |x_{n+1} - \xi_{n+1}| + \cdots + |x_k - \xi_k| \leqq \varrho$$

zu B fremd ist. Mit N bezeichnen wir die abgeschlossene Umgebung von P im R_k, bestehend aus allen Punkten $(x_1, \ldots, x_k)$ mit

$$|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n| \leqq \sigma, \quad |x_{n+1} - \xi_{n+1}| + \cdots + |x_k - \xi_k| \leqq \varrho'.$$

Der Durchschnitt $L = E(M + N)$ besteht aus allen Punkten

$$R = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{n+1}, \ldots, \eta_k)$$

mit

$$\tau \leqq \varrho, \quad \text{wobei} \quad |\eta_{n+1} - \xi_{n+1}| + \cdots + |\eta_k - \xi_k| = \tau$$

gesetzt ist. Für jeden Punkt R von L besteht der Durchschnitt $D(R)$ von $M + N$ mit der n-dimensionalen Ebene $x_{n+1} = \eta_{n+1}, \ldots, x_k = \eta_k$ durch R aus allen Punkten $(x_1, \ldots, x_k)$ mit

$$|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n| \leqq \sigma, \qquad x_{n+1} = \eta_{n+1}, \ldots, x_k = \eta_k.$$

Dieser Durchschnitt $D(R)$ ist Summe von 2^n abgeschlossenen n-dimensionalen Simplexen; jedes dieser Simplexe hat als Ecken erstens den Punkt R und zweitens auf jeder Parallelen durch R zur x_1-, …, x_n-Achse je einen der beiden Punkte, die von R den Abstand σ haben.

Da nach der ad absurdum zu führenden Annahme P kein Schnittpunkt ist, enthält der im R_n offene Kern $\underline{D}(P)$ von $D(P)$, bestehend aus den Punkten

$$|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n| < \sigma, \qquad x_{n+1} = \xi_{n+1}, \ldots, x_k = \xi_k,$$

einen Punkt $P^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_k)$ derart, daß die Ebene $x_1 = \xi_1^*, \ldots, x_n = \xi_n^*$ durch P^* mit BN nur (endlich viele) Punkte $P_1, \ldots, P_h$ gemein hat, die nicht schwache Schnittpunkte sind, vorausgesetzt, daß ϱ und σ hinreichend klein sind; ist insbesondere P kein schwacher Schnittpunkt, so kann sogar angenommen werden, daß die Ebene $x_1 = \xi_1^*, \ldots, x_n = \xi_n^*$ durch P^* mit BN einen leeren Durchschnitt hat.

Wir definieren nun eine topologische Hilfsabbildung χ des R_k auf sich:

Außerhalb und auf der Begrenzung von $M + N$ ist χ die identische Abbildung; für jeden Punkt $R = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{n+1}, \ldots, \eta_k)$ von L ist χ affin auf jedem der 2^n Simplexe von $D(R)$, und zwar derart, daß die Ecke R abgebildet wird auf den Punkt

$$x_1 = \xi_1 + \lambda(\xi_1^* - \xi_1), \ldots, x_n = \xi_n + \lambda(\xi_n^* - \xi_n), \qquad x_{n+1} = \eta_{n+1}, \ldots, x_k = \eta_k,$$

wobei

$$\lambda = 1, \text{ wenn } \tau \leqq \varrho', \text{ und } \lambda = \frac{\tau - \varrho}{\varrho' - \varrho}, \text{ wenn } \varrho' \leqq \tau \leqq \varrho \text{ ist.}$$

Ist nun P der Mittelpunkt eines abgeschlossenen, achsenparallelen, k-dimensionalen Quaders Q mit einem so kleinen Durchmesser, daß der Durchschnitt von Q mit der $(k - n)$-dimensionalen Ebene E der Parallelschar S durch P mit der Menge B nur den Punkt P gemein hat, und wählt man die zur Definition von χ benutzten positiven Zahlen ϱ und σ so klein, daß $M + N < Q$ ist, so hat die Hilfsabbildung χ, wie leicht zu sehen ist, folgende Eigenschaften:

α') χ bildet den R_k topologisch auf sich ab, und zwar so, daß $R_k - Q$ identisch auf sich abgebildet wird;

β') der Durchschnitt $B \cdot \chi(E) \cdot Q$ enthält keine schwachen Schnittpunkte von B; er ist sogar leer, wenn P kein schwacher Schnittpunkt ist;

γ') ist ζ eine hinreichend kleine positive Zahl, so sind, wenn $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ ein beliebiger Punkt von B ist, für die Menge

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0, \qquad |x_{n+1} - x_{n+1}^0| + \cdots + |x_k - x_k^0| \leqq \zeta$$

die Abbildungen χ und χ^{-1} Parallelverschiebungen.

Es sei $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ ein beliebiger Punkt von $B \cdot \chi(E)$. Nach γ') ist für die dort genannte Menge, die eine abgeschlossene Umgebung von P^0 in der $(k - n)$-dimensionalen Ebene $F = (x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0)$ durch P^0 ist, die Abbildung χ^{-1} eine Parallel-

verschiebung, bildet also diese Umgebung ab auf eine abgeschlossene Umgebung von $\chi^{-1}(P^0)$ in E. Mithin sind in der Umgebung von P^0 das Bild $\chi(E)$ und die Ebene F durch P^0 identisch. Da F mit B nur endlich viele Punkte gemein hat, ist also P^0 in $B \cdot \chi(E)$ isoliert. Mithin enthält der Durchschnitt $B \cdot \chi(E) \cdot Q$ nur endlich viele Punkte; wir bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit $P_1, \ldots, P_h$. Nach β') sind diese Punkte keine schwachen Schnittpunkte von B. Sie seien weiter die Mittelpunkte der hinreichend kleinen, paarweise fremden, abgeschlossenen, in Q enthaltenen, achsenparallelen, k-dimensionalen Quader $Q_1, \ldots, Q_h$. Dann existieren h Abbildungen $\chi_1, \ldots, \chi_h$ mit den Eigenschaften α') und β'), wenn man darin P durch P_i und Q durch Q_i ersetzt und für E die $(k-n)$-dimensionale Ebene E_i der Schar S durch P_i setzt $(i = 1, \ldots, h)$. Die Abbildung $\psi = \chi_h \cdots \chi_1 \chi$ hat erstens die Eigenschaft α'); zweitens gilt (für die Ebene E durch P):

β'') der Durchschnitt $B \cdot \psi(E) \cdot Q$ ist leer.

Es seien $E_1, \ldots, E_r$ endlich viele $(k-n)$-dimensionale Ebenen der Parallelschar S und $P^1, \ldots, P^g$ die endlich vielen Punkte des Durchschnittes $B \cdot (E_1 + \cdots + E_r)$. Die Punkte P^γ seien die Mittelpunkte der hinreichend kleinen, paarweise fremden, abgeschlossenen, achsenparallelen, k-dimensionalen Quader Q^γ $(\gamma = 1, \ldots, g)$. Wir setzen $Q = Q^1 + \cdots + Q^g$. Nach dem soeben Bewiesenen existieren g Abbildungen ψ^γ mit den Eigenschaften α') und β''), wenn man darin Q durch Q^γ, E durch die P^γ enthaltende Ebene E_ϱ und χ bzw. ψ durch ψ^γ ersetzt $(\gamma = 1, \ldots, g)$. Also hat die Abbildung $\varphi = \psi^\gamma \cdots \psi^1$ die folgenden beiden Eigenschaften:

α) φ bildet den R_k topologisch auf sich ab, und zwar so, daß $R_k - Q$ identisch auf sich abgebildet wird;

β) die Durchschnitte $B \cdot \varphi(E_\varrho)$ sind leer $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Wir beginnen nun die Herleitung eines Widerspruches aus der Annahme, die Behauptung 4 sei falsch.

Es sei ε eine beliebige positive Zahl.

Weiter sei $E = (x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n)$ eine $(k-n)$-dimensionale Ebene der Parallelschar S. Da der Durchschnitt $B \cdot E$ nur aus endlich vielen Punkten besteht, existiert eine Darstellung D von E als Summe abzählbar vieler kongruenter, abgeschlossener, achsenparalleler, $(k-n)$-dimensionaler Würfel $W_1, W_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \varepsilon$, die zu je zweien höchstens Begrenzungspunkte gemein haben und deren Begrenzungen zu B fremd sind. Die Summe der Begrenzungen $B(W_i)$ der Würfel W_i hat, da B beschränkt und abgeschlossen ist, von B einen positiven Abstand $p(E; D)$. Es sei $p(E)$ die obere Grenze aller Zahlen $p(E; D)$, wobei D alle Darstellungen von E der genannten Art durchläuft. Wir behaupten: Die Zahlen $p(E)$ haben eine positive untere Grenze, wobei E alle Ebenen der Parallelschar S durchläuft. Nehmen wir an, dies wäre falsch. Dann existiert eine Folge von Ebenen $E_1, E_2, \ldots$, deren zugehörige Zahlen $p(E_1), p(E_2), \ldots$ gegen Null konvergieren. Weil dann die Abstände der E_i von B gegen Null konvergieren müssen und B beschränkt ist, können und wollen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Ebenen E_i gegen eine Ebene E konvergieren. Die zu E gehörige Zahl $p(E)$ ist positiv. Es existiert also eine Darstellung D von E der oben genannten Art, deren zugehörige Zahl $p(E; D) > \frac{2}{3}\, p(E)$ ist. Für jede Ebene E_i nun, die von E einen Abstand $< \frac{1}{3}\, p(E)$ hat, liefert die Projektion von D auf E_i eine Darstellung D_i von E_i, deren zugehörige Zahl $p(E_i; D_i) > \frac{1}{3}\, p(E)$ ist. Also ist $p(E_i) > \frac{1}{3}\, p(E)$ für fast alle i, im Gegensatz zu $\lim p(E_i) = 0$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, die wir noch einmal formulieren:

a) Es existiert eine positive Zahl p mit folgender Eigenschaft: Für jede Ebene E der Parallelschar S existiert eine Darstellung D als Summe von abzählbar vielen kongruenten, abgeschlossenen, achsenparallelen, $(k-n)$-dimensionalen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \varepsilon$, die zu je zweien höchstens Begrenzungspunkte gemein haben, derart, daß B von der Summe der Begrenzungen $B(W_i)$ einen Abstand $> p$ hat. Wir wollen eine solche Darstellung D von E *ausgezeichnet* nennen.

Es sei weiter der durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte Teil-R_n des R_k dargestellt als Summe abzählbar vieler kongruenter, abgeschlossener, achsenparalleler, n-dimensionaler Würfel $V^1, V^2, \ldots$ mit Durchmessern $<$ Min (p, ε), die zu je $n+2$ einen leeren, zu je $n+1$ einen höchstens einpunktigen Durchschnitt und zu je zweien höchstens Begrenzungspunkte gemein haben [12]). Es sei $(x_1^i, \ldots, x_n^i, 0, \ldots, 0)$ der Mittelpunkt des Würfels V^i und $E^i = (x_1 = x_1^i, \ldots, x_n = x_n^i)$ die Ebene der Schar S durch diesen Mittelpunkt. Es sei D^i eine ausgezeichnete Darstellung von E^i, bestehend aus den Würfeln $W_1^i, W_2^i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Schließlich bezeichnen wir die abgeschlossenen k-dimensionalen Quader $V^i \times W_j^i$ $(i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots)$ in irgendeiner Reihenfolge mit $Q_1, Q_2, \ldots$.

b) Der Durchmesser jedes Quaders Q_h ist $< 2\varepsilon$.

Denn die Würfel V^i und W_j^i haben Durchmesser $< \varepsilon$. — Bezeichnen wir als *ausgezeichneten Begrenzungsteil* $A(Q_h)$ von $Q_h = V^i \times W_j^i$ die Menge derjenigen Begrenzungspunkte von Q_h, deren Projektion auf die Ebene E^i in der Begrenzung $B(W_j^i)$ von W_j^i liegt, so hat, da V^i einen Durchmesser $< p$ besitzt, jeder Punkt von $A(Q_h)$ einen Abstand $< p$ von $B(W_j^i)$, liegt also wegen a) nicht in B, da die W_j^i eine ausgezeichnete Darstellung von E^i bilden. Also gilt:

c) Die Summe aller ausgezeichneten Begrenzungsteile $A(Q_h)$ hat von B einen positiven Abstand.

Die Würfel V^i wurden so gewählt, daß sie zu je $n+2$ einen leeren und zu je $n+1$ einen höchstens einpunktigen Durchschnitt haben. Es seien $S_1, \ldots, S_r$ diejenigen endlich vielen Punkte des R_n, welche in $n+1$ Würfeln V^i enthalten sind und die Eigenschaft besitzen, daß die Ebene E_ϱ der Parallelschar S durch S_ϱ zu B nicht fremd ist. Es seien $P^1, \ldots, P^g$ die endlich vielen Punkte des Durchschnittes $B \cdot (E_1 + \cdots + E_r)$. Es sei Q^γ ein abgeschlossener, achsenparalleler, k-dimensionaler Quader mit dem Mittelpunkt P^γ $(\gamma = 1, \ldots, g)$ derart, daß die Q^γ sowohl zu je zweien als auch zu allen ausgezeichneten Begrenzungsteilen $A(Q_h)$ fremd sind, was wegen c) möglich ist. Es sei φ die topologische Abbildung des R_k auf sich mit den Eigenschaften α) und β) (S. 135).

Wir setzen $B \cdot \varphi(Q_h) = B_h$. Dann gilt, bei geeigneter Numerierung:

d) B ist Summe von endlich vielen Mengen B_i, etwa $B_1, \ldots, B_l$.

Denn da B beschränkt ist, hat B nur mit endlich vielen Mengen $\varphi(Q_h)$ Punkte gemein, und es ist $R_k = \sum_h \varphi(Q_h)$. Weiter gilt:

e) Die Mengen B_h sind abgeschlossen.

Denn die Quader Q_h sind abgeschlossen und daher auch die Mengen $\varphi(Q_h)$.

f) Die Durchmesser der Mengen B_h sind $< 3\varepsilon$.

Dies folgt aus b), wofern, was angenommen werden kann und soll, die Quader Q^γ hinreichend klein gewählt wurden. Schließlich behaupten wir:

[12]) Dimensionstheorie, S. 247.

g) Die Mengen B_h haben zu je $n+1$ einen leeren Durchschnitt.
Zum Beweis sei etwa $h_0, \ldots, h_n$ ein beliebiges $(n+1)$-Tupel natürlicher Zahlen. Der zu h_ν gehörige Quader sei etwa $Q_{h_\nu} = V^{i_\nu} \times W^{i_\nu}_{j_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Erster Fall: Unter den Zahlen $i_0, \ldots, i_n$ kommen zwei gleiche vor; es sei etwa $i_0 = i_1$. Dann ist der Durchschnitt $Q_{h_0} \cdot Q_{h_1}$ enthalten im ausgezeichneten Begrenzungsteil $A(Q_{h_0})$ von Q_{h_0} und daher wegen c) zu B fremd. Da wegen α) die Abbildung φ auf der Begrenzung von Q_{h_0} die Identität ist, so ist $\varphi(Q_{h_0}) \cdot \varphi(Q_{h_1}) = \varphi(Q_{h_0} \cdot Q_{h_1}) = Q_{h_0} \cdot Q_{h_1}$, also zu B fremd. Umso mehr ist $B_{h_0} \cdots B_{h_n} = B \cdot \varphi(Q_{h_0}) \cdots \varphi(Q_{h_n})$ leer. Zweiter Fall: Die Zahlen $i_0, \ldots, i_n$ sind paarweise verschieden. Dann ist der Durchschnitt $B \cdot Q_{h_0} \cdots Q_{h_n}$ in einer Ebene E_ϱ enthalten. Also ist $B \cdot \varphi(Q_{h_0}) \cdots \varphi(Q_{h_n}) = B \cdot \varphi(Q_{h_0} \cdots Q_{h_n})$ in $B \cdot \varphi(E_\varrho)$ enthalten und daher wegen β) leer. Mithin ist $B_{h_0} \cdots B_{h_n} = B \cdot \varphi(Q_{h_0}) \cdots \varphi(Q_{h_n})$ leer. Damit ist g) bewiesen.

Nach d)—g) kann man also die kompakte Menge B darstellen als Summe endlich vieler abgeschlossener Teilmengen mit beliebig kleinen Durchmessern, die zu je $n+1$ einen leeren Durchschnitt haben. Also ist B höchstens $(n-1)$-dimensional[13]). Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung der Behauptung 4 und wurde gefolgert aus der Annahme, daß die Behauptung 4 falsch sei. Also ist die Behauptung 4 richtig und der Beweis des Darstellungssatzes I beendet.

Beweis des Zusatzes. Ist A höchstens $(n-1)$-dimensional, so setzen wir $A' = A$, A'' gleich der leeren Menge und sind fertig. Wir dürfen also annehmen, daß A mindestens n-dimensional ist. Dann ist A genau n-dimensional. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt von A und E die Ebene aus S durch P, so sei F die zu E senkrechte n-dimensionale Ebene des R_k. Jede zu E hinreichend benachbarte Ebene E' aus S hat mit F genau einen Punkt gemein. Bilden wir für jede solche Ebene E' alle auf E' liegenden Punkte des kompakten Durchschnittes $A\overline{V}$, wobei V eine hinreichend kleine k-Kugel von P ist, auf den Punkt $E'F$ ab, so entsteht eine eindeutige, stetige Abbildung π von $A\overline{V}$ in F, welche die Dimension von $A\overline{V}$ nicht erniedrigt, da jeder Bildpunkt ein nulldimensionales Urbild hat[9]). Also ist $A\overline{V}$ höchstens n-dimensional, also, da P in A beliebig ist, auch A höchstens n-dimensional. Indem wir weiter die größte in A offene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge A' von A aus A tilgen, können wir sofort annehmen, daß (A die Dimension n hat und daß) die Menge aller Punkte von A, in denen A die Dimension n hat, in A dicht ist. Zu beweisen ist, daß A die abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise fremden, in A offenen n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ der Ordnung Eins bzgl. S und die Menge $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist[11]).

Es sei P ein beliebiger Punkt von A und E die P enthaltende Ebene aus S. Da P in EA enthalten ist, existiert eine positive Zahl ε so, daß, wenn K die offene k-Kugel um P mit dem Radius ε ist, die Begrenzung von EK zu A fremd ist. Wenn dabei ε hinreichend klein ist, so ist $\overline{K} < O$, wegen der lokalen Kompaktheit von A der Durchschnitt $A\overline{K}$ kompakt, und es existiert eine positive Zahl $\delta > 0$ derart, daß für jede Ebene E' aus S, für welche $E'K$ von EK einen Abstand $< \delta$ hat, die Begrenzung von $E'K$ zu A fremd ist. Es sei $U = U(P, \varepsilon, \delta)$ die Summe aller Durchschnitte $E'K$, wobei E' alle Ebenen aus S durchläuft, für welche $E'K$ von EK einen Abstand $< \delta$ hat. Dann ist U eine Umgebung von P. Wir bezeichnen die Begrenzungspunkte von U, die auf der Begrenzung von K liegen, als Begrenzungspunkte erster Art von U, die übrigen als Begrenzungspunkte zweiter Art von U. Zur Überdeckung von A genügen abzählbar viele

[13]) Dimensionstheorie, S. 157.

Umgebungen $U_i = U(P_i, \varepsilon_i, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Da $A\overline{K}_i$ kompakt ist und $U_i < K_i$ gilt, so ist $A\overline{U}_i$ kompakt, und es kann wie oben die eindeutige, stetige Abbildung π_i von $A\overline{U}_i$ in die zu E_i senkrechte n-dimensionale Ebene F_i durch P_i definiert werden; diese Abbildung ist dann von endlicher Ordnung, da jeder Durchschnitt $E'A\overline{U}_i$ kompakt ist und nur aus isolierten Punkten besteht. Für jede Menge $A\overline{U}_i$ sind also die Voraussetzungen des Darstellungssatzes II erfüllt; umsomehr für die Mengen $A\overline{U}_1 = B_1$, $A(\overline{U}_2 - U_1) = B_2$, $A(\overline{U}_3 - (U_1 + U_2)) = B_3, \ldots$. Also ist nach dem Darstellungssatz II, den wir anschließend (ohne Bezugnahme auf den hier zu beweisenden Zusatz) beweisen werden, für jedes $i = 1, 2, \ldots$ die Menge B_i Summe einer in B_i offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge B_i' und der abgeschlossenen Hülle B_i'' einer (eventuell leeren) Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise fremden, in B_i offenen n-Zellen $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ der Ordnung Eins bzgl. S; die Menge $B_i - (Z_{i1} + Z_{i2} + \cdots)$ ist höchstens $(n-1)$-dimensional. Wir bezeichnen die n-Zellen Z_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ in irgendeiner Reihenfolge mit $Z_1, Z_2, \ldots$. Zuerst behaupten wir: *A ist die abgeschlossene Hülle der Summe* $Z_1 + Z_2 + \cdots$. Nehmen wir an, ein Punkt P aus A hätte von $(Z_1 + Z_2 + \cdots)$ einen positiven Abstand. Dann wäre der Durchschnitt von A mit einer hinreichend kleinen, abgeschlossenen k-dimensionalen Kugel K um P Summe der höchstens $(n-1)$-dimensionalen, kompakten Durchschnitte $KB_1', KB_2', \ldots$, also selbst höchstens $(n-1)$-dimensional [14]), im Widerspruch zur obigen Voraussetzung. Zweitens behaupten wir: *Die n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ sind paarweise fremd und offen in A.* Nach Konstruktion der U_i enthält A keinen Begrenzungspunkt erster Art eines U_i; also enthalten auch die $Z_1, Z_2, \ldots$ keine Begrenzungspunkte erster Art der U_i; anderseits enthält keine n-Zelle $Z_1, Z_2, \ldots$ einen Begrenzungspunkt zweiter Art eines U_i, weil die Projektion π_i in den F_i die n-Zellen $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ auf offene Teilmengen von F_i topologisch abbildet. Mithin sind die n-Zellen $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ in der offenen Menge $U_i - (\overline{U}_1 + \cdots + \overline{U}_{i-1})$ enthalten (für $i = 1$ in der Menge U_1). Da diese offenen Mengen paarweise fremd und für jedes i die n-Zellen $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ paarweise fremd und in

$$B_i''(U_i - (\overline{U}_1 + \cdots + \overline{U}_{i-1})) = A(U_i - (\overline{U}_1 + \cdots + \overline{U}_{i-1}))$$

offen sind, sind die n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ paarweise fremd und in A offen. Schließlich ist *die Menge $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ höchstens $(n-1)$-dimensional*; denn sie ist die Summe der kompakten, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Mengen $B_i - (Z_{i1} + Z_{i2} + \cdots)$ [14]). Damit ist der Zusatz bewiesen.

Der Beweis des Darstellungssatzes II.

Die Abbildung f endlicher Ordnung des kompakten Raumes A erniedrigt die Dimension von A nicht [9]). Nun ist $f(A)$ als Teilmenge des R_n aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ höchstens n-dimensional [10]). Also ist auch A höchstens n-dimensional. Wir können also A von vornherein als eine Teilmenge des kartesischen Raumes R_{2n+1} aller $(2n+1)$-Tupel $(x_{n+1}, \ldots, x_{3n+1})$ annehmen [15]). Nun sei R_{3n+1} das topologische Produkt $R_n \times R_{2n+1}$ aus $R_n > f(A)$ und $R_{2n+1} > A$, also der Raum aller $(3n+1)$-Tupel $(x_1, \ldots, x_{3n+1})$. Weiter sei g die folgendermaßen definierte Abbildung von A in den R_{3n+1}: Ist $P = (x_{n+1}, \ldots, x_{3n+1})$ ein Punkt von A und $f(P) = (x_1, \ldots, x_n)$ sein Bild im R_n, so sei $g(P)$ der Punkt $f(P) \times P = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{3n+1})$ des R_{3n+1}. Da f eindeutig und stetig ist, gilt das gleiche von g. Sind P und Q zwei verschiedene Punkte von A, so sind auch ihre

[14]) Dimensionstheorie, S. 92.

[15]) W. Hurewicz, Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1933, S. 754—768.

Bilder $g(P) = f(P) \times P$ und $g(Q) = f(Q) \times Q$ verschieden. Also ist g eine topologische Abbildung. Die Menge $g(A)$ ist von endlicher Ordnung bzgl. der Parallelschar S aller $(2n+1)$-dimensionalen Ebenen $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ des R_{3n+1}; denn auf einer solchen Ebene liegen zwei Punkte $g(P)$ und $g(Q)$ dann und nur dann, wenn $f(P) = f(Q)$ ist, und nur für je endlich viele Punkte $P, Q, \ldots$ fallen die Bilder $f(P), f(Q), \ldots$ zusammen. Also erfüllt $g(A)$ die Voraussetzungen des Darstellungssatzes I; die Behauptungen dieses Satzes ergeben, da die Abbildung g topologisch ist, sofort die Behauptungen des Darstellungssatzes II.

Umgekehrt kann man übrigens auch den Darstellungssatz I sofort aus dem Darstellungssatz II erhalten. Die Projektion π von A in den $R_n < R_k$ (S. 131) ist nämlich eine eindeutige, stetige Abbildung endlicher Ordnung von A in den R_n.

Zusatz. Die Behauptungen des Darstellungssatzes II bleiben richtig, wenn man die Voraussetzungen durch folgende schwächere ersetzt: *A sei ein kompakter, metrischer Raum; f sei eine eindeutige, stetige Abbildung von A in den kartesischen R_n mit folgender Eigenschaft: Für jeden Punkt von $f(A)$ besteht die Urbildmenge aus endlich vielen Punkten, abgesehen höchstens von den Punkten einer im R_n nirgends dichten Teilmenge von $f(A)$, für welche die Urbildmengen höchstens nulldimensional sind.* Der Beweis erfolgt analog wie der Beweis für den Darstellungssatz II selbst; nur benutzt man am Schluß nicht den Darstellungssatz I, sondern seinen Zusatz, wobei man für O den im R_{3n+1} offenen Kern derjenigen Menge des R_{3n+1} nimmt, welche Summe ist von allen $(2n+1)$-dimensionalen Ebenen des Systems S, die mit $g(A)$ höchstens endlich viele Punkte gemein haben; für das A jenes Zusatzes wählt man $g(A) \cdot O$.

Verallgemeinerung des Darstellungssatzes I.

Der Darstellungssatz II liefert eine weitgehende Verallgemeinerung des Darstellungssatzes I.

Es sei R ein metrischer Raum und S ein beliebiges System von Teilmengen C von R. Weiter sei A eine kompakte Teilmenge von R mit endlicher Ordnung bzgl. S; die Durchschnitte AC mögen eine stetige Zerlegung[7]) *von A bilden derart, daß der zugehörige Zerlegungsraum Z durch eine eindeutige, stetige Abbildung h endlicher Ordnung in den kartesischen R_n abgebildet werden kann. Dann gelten für A die Behauptungen des Darstellungssatzes I.*

Bezeichnet nämlich g die eindeutige, stetige Abbildung von A auf den Zerlegungsraum Z, bei welcher zwei Punkte von A dann und nur dann auf denselben Bildpunkt abgebildet werden, wenn sie in derselben Zerlegungsmenge AC liegen, so ist $f = hg$ eine eindeutige, stetige Abbildung von A in den R_n. Daher gelten für A die Behauptungen des Darstellungssatzes II, also auch die des Darstellungssatzes I.

Betrachten wir die kompakte Menge A selbst als einen Raum, so können wir das soeben Bewiesene auch folgendermaßen aussprechen.

Der kompakte Raum A sei stetig zerlegt in endliche Mengen und der zugehörige Zerlegungsraum Z könne durch eine eindeutige, stetige Abbildung h endlicher Ordnung in den kartesischen R_n abgebildet werden. Dann ist A höchstens n-dimensional und darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge A' und der abgeschlossenen Hülle A'' einer (möglicherweise leeren) Summe von höchstens abzählbar vielen, in A'' offenen, paarweise fremden n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$, von denen jede durch die Zerlegung von A in ihre Punkte zerlegt wird; die Menge $A - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ ist höchstens $(n-1)$-dimensional; die n-Zellen Z_i sind dann und nur dann vorhanden, wenn das Bild $h(Z)$ eine im R_n offene Teilmenge enthält.

Über die ordnungshomogenen Mengen.

Im metrischen Raum R sei ein beliebiges System S von Mengen C als Ordnungscharakteristiken gegeben. Ist A eine Teilmenge von R und P ein Punkt von A, so versteht man unter der Ordnung von A in P die größte Mächtigkeit, die als Ordnung des Durchschnittes von A mit beliebig kleinen Umgebungen U von P auftreten kann, vorausgesetzt, daß diese größte Mächtigkeit existiert. Die Menge A heißt von der *homogenen Ordnung* m, wenn sie in allen ihren Punkten die Ordnung m besitzt.

Eine wichtige Frage der Ordnungstheorie ist die nach allen Mächtigkeiten, welche in einem vorgegebenen Raum R mit vorgegebenen Ordnungscharakteristiken C als homogene Ordnungen auftreten können. Bereits bekannte Sätze sagen aus, daß in kartesischen Räumen für gewisse, spezielle Charakteristikensysteme die kleinste Ordnung, die eine Mannigfaltigkeit des Raumes haben kann, die einzig mögliche endliche, homogene Ordnung für eine Menge ist [16]). Das gleiche können wir für die von uns betrachteten Ordnungen zeigen.

Im metrischen Raum R sei ein Charakteristikensystem S gegeben mit folgender Eigenschaft: Jede kompakte, n-dimensionale Menge A des Raumes R, die keine in ihr offene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge enthält und von endlicher Ordnung bzgl. S ist, enthält eine in A offene n-Zelle der Ordnung Eins bzgl. S. Hat dann eine kompakte, n-dimensionale Teilmenge A von R ohne in ihr offene, höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge die homogene Ordnung m bzgl. S, so ist m gleich Eins oder unendlich.

Denn ist m endlich, so ist A Summe von endlich vielen in A offenen Teilmengen der Ordnung m bzgl. S, hat also eine endliche Ordnung bzgl. S. Mithin enthält A eine in A offene n-Zelle Z der Ordnung Eins bzgl. S. In jedem Punkt von Z hat dann A die Ordnung Eins bzgl. S. Also ist $m = 1$.

Der soeben bewiesene Satz gilt auf Grund des Darstellungssatzes I bzw. seines Zusatzes insbesondere dann, wenn R der kartesische R_k und S eine R_k überdeckende Parallelschar $(k-n)$-dimensionaler Ebenen des R_k oder eine in ihr dichte und offene Teilschar ist [17]).

[16]) Ist R die euklidische Ebene, S ein Büschel von Geraden bzw. das System aller Geraden bzw. das System aller Kreise (einschließlich der Geraden), so ist für Bogen die einzige endliche, nicht triviale homogene Ordnung gleich 1 bzw. 2 bzw. 3. Vgl. Haupt, a. a. O. [2]) bzw. Über die Struktur reeller Kurven, Journ. f. d. r. u. a. Math. **164** (1931), S. 50—60; bzw. Bestimmung der zyklisch-ordnungshomogenen ebenen Bogen. 1. Mitt., ebenda **178** (1938), 14—28; 2. Mitt., ebenda **180**, (1939), S. 44—72.

[17]) Die Frage nach den homogenen Ordnungen der höchstens $(n-1)$-dimensionalen Mengen wird in einer demnächst in diesem Journal erscheinenden Arbeit behandelt werden; darin wird u. a. auch eine Umkehrung des Darstellungssatzes I bewiesen werden.

Eingegangen 29. September 1938.

Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von *H. Lemke* in Berlin.

Die Differentialgleichung

$$Y' + a_1 Y^3 + 3a_2 Y^2 + 3a_3 Y + a_4 = 0$$

läßt sich, wenn man eine partikuläre Lösung Y_0 kennt, durch die Transformation $Y = z\varphi(x) + Y_0$ in die Form

$$\frac{dz}{dx} = r_1 z^2 - r_0 z^3$$

bringen, vorausgesetzt daß $\varphi(x)$ aus der Gleichung

$$a_1 Y_0^2 + 2a_2 Y_0 + a_3 + \frac{1}{3}\frac{d \log \varphi}{dx} = 0$$

bestimmt wird. Diese Normalform und eine andere, nämlich

$$y \frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y,$$

welche man erhält, wenn man $z = -\frac{1}{y}$ setzt, soll in der folgenden Abhandlung zugrunde gelegt werden. Schon Abel und später besonders französische Mathematiker haben sich um das Integrationsproblem bemüht und bemerkenswerte Ergebnisse erzielt. Wie aus diesen Arbeiten hervorgeht, kann es sich zur Zeit nur darum handeln, aus der Fülle der Möglichkeiten gewisse Typen von Differentialgleichungen herauszulösen, indem man geeignete Voraussetzungen, z. B. über die Natur der Koeffizienten oder der partikulären Lösungen macht. Es versteht sich jedoch von selbst, daß solche Typen nicht trivial sein dürfen, sondern aus dem einen oder andern Grunde beachtenswerte Eigenschaften besitzen.

Eine kurze Inhaltsangabe möge die Übersicht über die folgenden Untersuchungen erleichtern. Nachdem zunächst die Transformationen der Funktion z und der Veränderlichen x, sowie die zugehörigen Invarianten besprochen worden sind, wird gezeigt, wie man durch passende Spezialisierung der Substitutionskoeffizienten zu einer Klasse von Differentialgleichungen gelangt, deren einfachste Repräsentanten schon von Elliot und von Halphen behandelt wurden.

Weiter wird vorausgesetzt, daß eine Anzahl partikulärer Integrale existieren, die einer algebraischen Gleichung mit vorgeschriebenen rationalen Koeffizienten genügen. Je nach der Beschaffenheit dieser Relation, besonders was den Grad betrifft, erhält man wiederum neue Typen. Die einfachsten Fälle der quadratischen und kubischen Gleichung werden diskutiert; eine von Halphen untersuchte Differentialgleichung, auf die er beim Studium der Multiplikation der elliptischen Funktionen gekommen ist,

gehört hierher; sie wird nach einer besonderen Methode vollständig und zwar algebraisch integriert.

Bekanntlich ist die Integration der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung nicht schwierig, wenn man weiß, daß eine gegebene Funktion eine partikuläre Lösung derselben darstellt. So einfach liegen hier die Verhältnisse nicht. Es ist indessen möglich, einen integrierenden Faktor aus einer bestimmten Anzahl partikulärer Integrale zusammenzusetzen, vorausgesetzt daß zwischen den letzteren eine gewisse lineare nichthomogene Relation besteht. Von der Natur dieser Bedingung, insbesondere von der Anzahl der in ihr auftretenden partikulären Lösungen hängt nicht nur die Gestalt des integrierenden Faktors, sondern auch die Form der Koeffizienten der Differentialgleichung ab. Es gehörte nicht zum Plan dieser Arbeit, die Frage der algebraischen Integrierbarkeit allgemein zu untersuchen; aber gerade in diesem Zusammenhange drängen sich die Fälle in den Vordergrund, die eine derartige Integration gestatten.

Ebenso wie man die Riccatische Gleichung in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandeln kann und damit unter Umständen die analytische Behandlung erleichtert, läßt sich auch hier eine entsprechende Transformation angeben; nur ist die resultierende Differentialgleichung nicht linear. Man gelangt jedoch durch Spezialisierung der Koeffizienten zu einem bemerkenswerten Typus, dessen Integration auf die Umkehrung elliptischer und hyperelliptischer Integrale führt. Dabei stellt sich heraus, daß es nichtlineare Transformationen gibt, durch welche diese Differentialgleichungen in sich selbst oder in andere von ähnlicher Gestalt übergehen. Schon R. Liouville und später auch der Verf. haben sich mit solchen Transformationsproblemen beschäftigt; sie sollen hier unter allgemeineren Gesichtspunkten von neuem aufgenommen werden.

Erstes Kapitel.
Lineare Transformationen der abhängigen Variablen. Invarianten.

1. Es sei z_0 eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = r_1 z^2 - r_0 z^3, \tag{1}$$

in der die Koeffizienten r_0 und r_1 gegebene Funktionen von x sind. Setzt man

$$z = \mu(x)\,\zeta + z_0,$$

so heißt die Gleichung für ζ

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left(2z_0 r_1 - 3z_0^2 r_0 - \frac{d\log\mu}{dx}\right)\zeta + \mu(r_1 - 3r_0 z_0)\,\zeta^2 - \mu^2 r_0 \zeta^3 .$$

Über die Funktion μ kann man so verfügen, daß der Faktor von ζ verschwindet,

$$\frac{d\log\mu}{dx} = z_0(2r_1 - 3r_0 z_0)\,, \tag{2}$$

woraus

$$\mu = e^{\int z_0(2r_1 - 3r_0 z_0)\,dx} = z_0^2\, e^{-\int r_0 z_0^2\,dx}$$

folgt. Die Differentialgleichung für ζ nimmt dieselbe Form an wie die gegebene, nämlich

$$\frac{d\zeta}{dx} = \varrho_1 \zeta^2 - \varrho_0 \zeta^3 . \tag{3}$$

Die Koeffizienten werden aus den Gleichungen

$$\varrho_0 = \mu^2 r_0, \qquad \varrho_1 = \mu(r_1 - 3r_0 z_0)$$

berechnet.

Es existieren zwei bemerkenswerte Invarianten; zunächst überzeugt man sich durch Rechnung, daß die Gleichung

$$S = \frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} - \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} - \frac{2}{9}\frac{\varrho_1^2}{\varrho_0}\right) = \frac{r_1}{\sqrt{r_0}}\left(\frac{r_1'}{r_1} - \frac{r_0'}{r_0} - \frac{2}{9}\frac{r_1^2}{r_0}\right)$$

besteht. Diese Invariante ist bekannt; sie ist in einer etwas anderen Gestalt bereits von Appell und R. Liouville angegeben worden [1]). Aber man hat auch

$$H = \frac{3\varrho_0' + 2\varrho_1^2}{\varrho_0} = \frac{3r_0' + 2r_1^2}{r_0}.$$

Die Invariante H tritt hier neu auf; sie ist für die *spezielle* Transformation, welche auf die reduzierte Differentialgleichung (1) angewandt wurde, charakteristisch. Übrigens sind die Ableitungen der beiden Funktionen H und S nach x gleichfalls Invarianten.

Führt man nun in die Differentialgleichung (1) für z eine neue Unbekannte ϱ vermittels der Gleichung

$$3z = \frac{r_1}{r_0} - \frac{\varrho}{\sqrt{r_0}}$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{d\varrho}{dx} = S + \frac{1}{6}H\varrho - \frac{1}{9}\varrho^3. \tag{4}$$

Die Koeffizienten sind hier die beiden Invarianten. Jedem partikulären Integral z_0 von (1) entspricht ein partikuläres Integral $\bar{\varrho} = \frac{r_1}{\sqrt{r_0}} - 3\sqrt{r_0}z_0$ von (4). Da man z. B. $z_0 = 0$ setzen kann, ist $\bar{\varrho} = \frac{r_1}{\sqrt{r_0}}$ ein Integral von (4). Derselben Gleichung genügt auch die Funktion $\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_0}}$, wovon man sich durch Einsetzen überzeugt. Es gibt einige Fälle, in denen sich die Integration von (4) leicht ausführen läßt, z. B. wenn $S = 0$ ist; dann hat man

$$\frac{d\log\left(\frac{r_0}{r_1}\right)}{dx} = -\frac{2}{9}\frac{r_1^2}{r_0}, \qquad \frac{r_0}{r_1} = -\frac{2}{9}R_1,$$

wo $R_1 = \int r_1 dx + \text{const.}$ gesetzt wurde. Besteht also zwischen r_0 und r_1 diese Beziehung, so ist nicht nur (4), sondern auch (1) durch Quadraturen integrierbar. — Einen anderen integrablen Fall findet man, wenn sich sowohl H als auch S auf eine Konstante reduzieren.

Man kann aus (4) eine Differentialgleichung bilden, in deren Koeffizienten nur eine einzige absolute Invariante auftritt. Man setzt zu diesem Zwecke

$$\varrho = -3^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}\lambda, \qquad x_1 = -3^{-\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}\int S^{\frac{2}{3}}dx,$$

wo K irgendeine von Null verschiedene Konstante ist. Die Differentialgleichung zwischen λ und x_1 heißt dann

$$\frac{d\lambda}{dx_1} = \lambda^3 + L\lambda + K, \tag{5}$$

wenn man zur Abkürzung $L = 3^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}\left(\frac{d\log S}{dx} - \frac{1}{2}H\right)S^{-\frac{2}{3}}$ setzt. Die Funktion L ist eine Invariante, da sie nur von $H, S, \frac{dS}{dx}$ abhängt. Reduziert sie sich auf eine Konstante, so lassen sich die angegebenen Differentialgleichungen durch Quadraturen integrieren. —

---

[1]) P. Appell, Sur les invariants de quelques équations différentielles, Journal de Mathématiques (4) **5** (1889), p. 361-423.

R. Liouville, Sur les invariants de certaines équations differentielles, Journal de l'école polytechn. **59** (1889), p. 7—76.

Die bisher untersuchten Eigenschaften der Funktionen H, S, L gelten zunächst nur für die Transformation $z = \mu(x)\zeta + z_0$ der abhängigen Variablen. Es fragt sich, welches Verhalten sie zeigen, wenn eine Änderung der unabhängigen Variablen erfolgt.

Wenn man an Stelle von x eine neue unabhängige Veränderliche ξ einführt, geht (1) in die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{d\xi} = r_1^* z^2 - r_0^* z^3 \tag{6}$$

über, und es sind r_1^* und r_0^* Funktionen von ξ, welche sich aus den Gleichungen

$$r_1 = r_1^* \frac{d\xi}{dx}, \qquad r_0 = r_0^* \frac{d\xi}{dx}$$

berechnen lassen. Auch die Differentialgleichung (6) besitzt zwei Invarianten H^* und S^*; sie werden aus r_0^* und r_1^* ebenso gebildet wie H und S aus r_0 und r_1. Es ist also

$$H^* = \frac{3}{r_0^*}\frac{dr_0^*}{d\xi} + \frac{2r_1^{*2}}{r_0^*},$$

$$S^* = \frac{r_1^*}{\sqrt{r_0^*}}\left(\frac{1}{r_1^*}\frac{dr_1^*}{d\xi} - \frac{1}{r_0^*}\frac{dr_0^*}{d\xi} - \frac{2}{9}\frac{r_1^{*2}}{r_0^*}\right).$$

Zwischen H und H^* einerseits, S und S^* andererseits bestehen die Beziehungen

$$H = H^*\xi' + \frac{3\xi''}{\xi'}, \qquad S = S^*(\xi')^{\frac{3}{2}}, \tag{7}$$

wo die Ableitungen von ξ nach x zu nehmen sind. Die Formeln lehren, daß die Funktionen H und S bei einer Transformation der unabhängigen Variablen nicht ungeändert bleiben. Anders verhält sich jedoch die Invariante L. Aus (7) ergeben sich die Relationen

$$\frac{d\log S}{dx} = \frac{d\log S^*}{d\xi}\xi' + \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}, \qquad \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}H^*\xi' + \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}, \qquad S^{-\frac{2}{3}} = (S^*)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\xi'},$$

woraus sofort folgt, daß

$$\left(\frac{d\log S}{dx} - \frac{1}{2}H\right)S^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{d\log S^*}{d\xi} - \frac{1}{2}H^*\right)(S^*)^{-\frac{2}{3}}$$

ist. Eine Änderung der unabhängigen Veränderlichen hat demnach keinen Einfluß auf die Form der Funktion L.

Für den Fall $L = \text{const.}$ soll das allgemeine Integral von (5) hingeschrieben werden, das im folgenden gebraucht wird. Es seien a_1, a_2, a_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung $\lambda^3 + L\lambda + K = 0$, und es möge, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, vorausgesetzt werden, daß diese Größen voneinander verschieden sind. Dann heißt das allgemeine Integral

$$F(\lambda) = n_1\log(\lambda - a_1) + n_2\log(\lambda - a_2) + n_3\log(\lambda - a_3) = x_1 + c. \tag{8}$$

Die Koeffizienten n_k lassen sich aus den Wurzeln a_k berechnen, c ist die Integrationskonstante.

Wenn $L = \text{const.}$ ist, hängt mit der Differentialgleichung (5) aufs engste eine andere zusammen, die aus (1) hervorgeht, indem man für r_0 eine Funktion dritten, für r_1 eine Funktion ersten Grades annimmt. Man findet sie folgendermaßen: Es sei λ_0 ein partikuläres Integral von (5), welches nicht konstant ist, also z. B. diejenige Funktion λ, welche man aus (8) für $c = 0$ erhält. An Stelle von λ führe man nun in (5) eine neue Unbekannte z_1 durch die Gleichung

$$\lambda = \lambda_0 + Gz_1 \tag{9}$$

ein, wo $G = \lambda_0^3 + L\lambda_0 + K$ ist. Dann ergibt die Rechnung, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{d\lambda_0}{dx_1} = G$ ist:

$$\frac{d\lambda}{dx_1} = G + G\,z_1(3\lambda_0^2 + L) + G\,\frac{dz_1}{dx_1}\,,$$

$$\lambda^3 + L\lambda + K = G + G\,z_1(3\lambda_0^2 + L) + 3\lambda_0 G^2 z_1^2 + G^3 z_1^3\,.$$

Setzt man beide Ausdrücke gleich, so entsteht eine Differentialgleichung für die Funktion z_1,

$$\frac{dz_1}{dx_1} = 3\lambda_0 G z_1^2 + G^2 z_1^3\,,$$

und wenn man noch die Veränderliche x_1 durch λ_0 ersetzt,

$$\frac{dz_1}{d\lambda_0} = 3\lambda_0 z_1^2 + (\lambda_0^3 + L\lambda_0 + K) z_1^3\,. \tag{10}$$

Das allgemeine Integral von (10) ist

$$F(\lambda_0 + G\,z_1) - F(\lambda_0) = \text{const.}$$

Man überzeugt sich davon, indem man nach λ_0 differenziert und von der Gleichung

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^3 + L\lambda + K}$$

Gebrauch macht. Man kann noch für $F(\lambda)$ die in Gleichung (8) angegebene spezielle Funktion einsetzen und gelangt dann zu der endgültigen Form des allgemeinen Integrals:

$$[1 + (\lambda_0 - a_2)(\lambda_0 - a_3) z_1]^{n_1} \cdot [1 + (\lambda_0 - a_1)(\lambda_0 - a_3) z_1]^{n_2} \cdot [1 + (\lambda_0 - a_1)(\lambda_0 - a_2) z_1]^{n_3} = \text{const.} \tag{11}$$

Hierzu gehören drei partikuläre Integrale, sie sind die reziproken Werte ganzer Funktionen zweiten Grades, und man erhält sie, indem man jeden der drei Faktoren in (11) gleich Null setzt.

Man kann die Frage aufwerfen, ob stets die Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = (a_0 t + a_1)\,\omega^2 - (b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3)\,\omega^3, \tag{12}$$

in der die Koeffizienten Funktionen ersten und dritten Grades von t sind, durch eine lineare Substitution

$$t = \beta_0 + \beta_1 \lambda_0, \qquad \omega = \alpha z_1\,,$$

in die einfachere Form (10) gebracht, also mit Hilfe der hier dargelegten Methode integriert werden kann. Es zeigt sich, daß dies nur möglich ist, wenn die Konstanten a_k und b_k den Bedingungen $b_0 = -\frac{1}{9} a_0^2$, $b_1 = -\frac{1}{3} a_0 a_1$ genügen.

Die Differentialgleichung (12), in der die Koeffizienten der angegebenen Einschränkung unterworfen sind, ist schon von Elliot [2]) in einem anderen Zusammenhange untersucht worden. Er beweist z. B., daß man die bekannte Jacobische Differentialgleichung

$$L_1(x\,dy - y\,dx) - M_1 dy + N_1 dx = 0\,,$$

in der L_1, M_1, N_1 lineare Funktionen von x und y sind, in die Form (12) bringen kann.

2. *Ein bemerkenswerter Typus* von Differentialgleichungen entsteht, wenn die Koeffizienten r_0, r_1, $\mu(x)$ folgenden Bedingungen unterliegen: Es seien r_0 und r_1 ganze Funktionen vom Grade n_0 bzw. n_1, und es sei $\mu(x)$ die m-te Wurzel aus einer rationalen Funktion, wo m eine Konstante ist. Bevor jedoch in eine eingehende Erörterung dieser Bedingungen eingetreten wird, soll eine Formel für die beiden ersten logarithmischen Ableitungen von $\mu(x)$ aufgestellt werden, die in diesem Zusammenhange nützlich ist.

[2]) Elliot, Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi, Annales scientifiques de l'école normale (3) **7** (1890), p. 101—134.

Die Funktion $\mu(x)$ genügt der Gleichung (2):

$$\frac{d\log\mu}{dx} = 2r_1z_0 - 3r_0z_0^2.$$

Man differenziert nach x und berücksichtigt, daß z_0 der gegebenen Differentialgleichung (1) genügt,

$$\frac{d^2\log\mu}{dx^2} = 2r_1'z_0 + (2r_1^2 - 3r_0')z_0^2 - 8r_0r_1z_0^3 + 6r_0^2z_0^4,$$

$$\left(\frac{d\log\mu}{dx}\right)^2 = 4r_1^2z_0^2 - 12r_0r_1z_0^3 + 9r_0^2z_0^4.$$

Man bildet den Ausdruck

$$r_1\frac{d^2\log\mu}{dx^2} - \frac{2}{3}r_1\left(\frac{d\log\mu}{dx}\right)^2 - r_1'\frac{d\log\mu}{dx} = 3z_0^2r_0^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{r_1}{\sqrt{r_0}}\left(\frac{r_1'}{r_1} - \frac{r_0'}{r_0} - \frac{2}{9}\frac{r_1^2}{r_0}\right).$$

Auf der rechten Seite tritt die Invariante S auf; das Ergebnis ist also

$$(13)\qquad r_1\frac{d^2\log\mu}{dx^2} - \frac{2}{3}r_1\left(\frac{d\log\mu}{dx}\right)^2 - r_1'\frac{d\log\mu}{dx} = 3z_0^2r_0^{\frac{3}{2}}S.$$

Wenn nun die Koeffizienten $r_0, r_1, \mu(x)$ den angegebenen Einschränkungen unterworfen sind, ist die linke Seite von (13) eine rationale Funktion von x; dasselbe gilt von dem Produkt

$$r_0^{\frac{3}{2}}S = r_0r_1\left(\frac{r_1'}{r_1} - \frac{r_0'}{r_0} - \frac{2}{9}\frac{r_1^2}{r_0}\right).$$

Es ist daher z_0^2 eine rationale Funktion von x. Aus (2) folgt

$$z_0 = \frac{1}{2r_1}\frac{d\log\mu}{dx} + \frac{3}{2}\frac{r_0}{r_1}z_0^2.$$

Es ist also auch z_0 eine rationale Funktion; sie soll für $x=\infty$ von der Ordnung ν verschwinden, ν eine ganze Zahl. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d\log z_0}{dx} = r_1z_0 - r_0z_0^2, \qquad \frac{d\log\mu}{dx} = 2r_1z_0 - 3r_0z_0^2$$

ergeben sich zwei andere:

$$2\frac{d\log z_0}{dx} - \frac{d\log\mu}{dx} = r_0z_0^2, \quad 3\frac{d\log z_0}{dx} - \frac{d\log\mu}{dx} = r_1z_0.$$

Ihre linken Seiten verschwinden für $x=\infty$ von der ersten Ordnung, die rechte Seite der ersten von der Ordnung $2\nu - n_0$, die der zweiten von der Ordnung $\nu - n_1$. Infolge dessen hat man die Gleichungen $2\nu - n_0 = +1$, $\nu - n_1 = +1$. Da ν eine ganze Zahl sein sollte, muß n_0 ungerade sein, $n_0 = 2n+1$, $\nu = n+1$, $n_1 = n$. Es sind demnach r_0 und r_1 ganze Funktionen vom Grade $2n+1$ bzw. n, z_0 eine rationale Funktion, welche für $x=\infty$ von der Ordnung $n+1$ verschwindet, wo mit n eine positive ganze Zahl bezeichnet wird.

Es soll nun bewiesen werden, daß z_0 der reziproke Wert einer ganzen rationalen Funktion ist. Es genügt, zu zeigen, daß z_0 keine im Endlichen gelegene Nullstelle besitzt. Angenommen, z_0 verschwindet für $x=a$ von der Ordnung k, $k \geqq 1$; dann existiert eine Reihenentwicklung

$$z_0 = (x-a)^k\mathfrak{P}(x-a),$$

wo $\mathfrak{P}(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe ist, die sich für $x=a$ auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert. In der Gleichung

$$\frac{d\log z_0}{dx} = z_0(r_1 - r_0z_0)$$

wird die linke Seite

$$\frac{d \log z_0}{dx} = \frac{k}{x-a} + \frac{\mathfrak{P}'(x-a)}{\mathfrak{P}(x-a)}$$

für $x = a$ von der ersten Ordnung *unendlich*. Dagegen muß die rechte Seite

$$z_0(r_1 - r_0 z_0) = (x-a)^k \mathfrak{P}(x-a)\,[r_1 - r_0(x-a)^k \mathfrak{P}(x-a)]$$

mindestens von der k-ten Ordnung *verschwinden*. Das ist unmöglich; folglich besitzt z_0 keine im Endlichen gelegene Nullstelle. Setzt man also $z_0 = -\frac{1}{y_0}$, so ist y_0 eine ganze Funktion $(n+1)$-ten Grades.

Es liegt nun nahe, in die Differentialgleichung (1) an Stelle von z eine andere Funktion $y = -\frac{1}{z}$ einzuführen, welche man aus der Gleichung

$$y \frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y \tag{14}$$

zu bestimmen hat; auch die Funktion y_0 genügt dieser Gleichung, die man in die Form

$$\frac{dy_0}{dx} - r_1 = \frac{r_0}{y_0}$$

bringen kann. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die linke Seite eine ganze Funktion vom Grade n; folglich muß der Koeffizient r_0 durch y_0 teilbar und auch der Quotient $h = \frac{r_0}{y_0}$ eine ganze Funktion vom Grade n sein.

Wenn man annimmt, daß r_1 und h gegeben sind, ermittelt man zunächst das partikuläre Integral y_0 von (14) aus der Gleichung $y_0' = r_1 + h$ und berechnet alsdann den anderen Koeffizienten $r_0 = y_0 h$. In der Regel liegen die Dinge aber umgekehrt: Es sind r_0 und r_1 gegeben, und man soll feststellen, welche Einschränkungen notwendig sind, damit ein partikuläres Integral y_0 existiert, welches eine ganze Funktion vom Grade $n+1$ ist.

Die einfachsten Voraussetzungen, die man in bezug auf die positive ganze Zahl n machen kann, sind $n = 0$ oder $n = 1$. Im ersten Fall sind r_1 und h Konstanten, y_0 und r_0 lineare Funktionen von x, und die Differentialgleichung (14) läßt sich durch lineare Substitutionen in die Form $y\frac{dy}{dx} = \varkappa x + y$ bringen. Wenn die Ungleichung $1 + 4\varkappa > 0$ besteht und

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\varkappa}), \qquad \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4\varkappa}),$$

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4\varkappa}}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\varkappa}}\right)$$

gesetzt wird, heißt das allgemeine Integral

$$(y - \alpha x)^A (y - \beta x)^B = \text{const.}$$

Es gibt zwei partikuläre Integrale $y_0 = \alpha x$ und $y_0 = \beta x$.

Wichtiger ist der Fall $n = 1$. Die Funktionen r_1 und h sind vom ersten, y_0 vom zweiten und r_0 vom dritten Grade. Ein Beispiel ist die Gleichung (10), wenn man darin $z_1 = -\frac{1}{y}$ setzt. — Es sei allgemein

$$r_0 = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3, \qquad r_1 = a_0 x + a_1 .$$

Ist dann $y_0 = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$ ein partikuläres Integral, so genügen die Koeffizienten

folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2c_0^2 &= a_0c_0 + b_0, \\ 3c_0c_1 &= a_0c_1 + a_1c_0 + b_1, \\ 2c_0c_2 + c_1^2 &= a_0c_2 + a_1c_1 + b_2, \\ c_1c_2 &= a_1c_2 + b_3. \end{aligned}$$

Die Elimination von c_0, c_1, c_2 liefert die gesuchte Beziehung zwischen den a_k und b_k. Das Resultat erscheint jedoch in einer komplizierten und unübersichtlichen Gestalt, und es ist daher zweckmäßiger, anstatt einer Relation zwischen den Koeffizienten eine Beziehung zwischen den Nullstellen der ganzen Funktionen r_0 und r_1 aufzustellen. Es sei

$$r_0 = b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3), \quad r_1 = a_0(x-\alpha).$$

Da r_0 durch das partikuläre Integral teilbar ist, kann letzteres in der Form

$$y_0 = c_0(x-\beta_2)(x-\beta_3)$$

vorausgesetzt werden. Nun ist $\frac{dy_0}{dx} = \frac{r_0}{y_0} + r_1$, folglich

$$c_0[2x-(\beta_2+\beta_3)] = \frac{b_0}{c_0}(x-\beta_1) + a_0(x-\alpha).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von x; man setze zunächst $x=\alpha$ und dann $x=\beta_1$. Zwischen den Gleichungen

$$\frac{b_0}{c_0^2} = \frac{2\alpha-(\beta_2+\beta_3)}{\alpha-\beta_1}, \qquad \frac{a_0}{c_0} = -\frac{2\beta_1-(\beta_2+\beta_3)}{\alpha-\beta_1}$$

eliminiert man c_0; das Ergebnis ist

$$b_0 = \frac{a_0^2(\alpha-\beta_1)\{2\alpha-(\beta_2+\beta_3)\}}{\{2\beta_1-(\beta_2+\beta_3)\}^2}. \tag{15}$$

Die Ausnahmefälle $\alpha=\beta_1$, $2\alpha=\beta_2+\beta_3$, $2\beta_1=\beta_2+\beta_3$ erfordern eine besondere Behandlung.

Weiter unten wird eine Differentialgleichung untersucht werden, die schon Halphen zum Gegenstande eines besonderen Studiums gemacht hat. Sie läßt sich in die Form $y\frac{dy}{dx} = r_0 + r_1y$ überführen, wo

$$r_0 = -3x(x+1)(8x-1), \qquad r_1 = 2(7x+1)$$

ist, und besitzt das partikuläre Integral $y_0 = 3x(x+1)$. Sie ist ein lehrreiches Beispiel für die Betrachtungen des letzten Abschnitts. Es besteht die Gleichung (15), und der Koeffizient r_0 ist durch y_0 teilbar. Die Funktion $\mu(x)$, die der Gleichung (2) genügt und von der vorausgesetzt wurde, daß sie die m-te Wurzel aus einer rationalen Funktion ist, wird $\mu = c(x+1)x^{-\frac{7}{3}}$; d. h. es ist $m=3$.

3. Für viele Differentialgleichungen von der Form (1) bedeutet die *Einführung der kanonischen Variablen*

$$R_1 = \int r_1dx + \text{const.}$$

an Stelle der Veränderlichen x eine wesentliche Erleichterung der in Frage kommenden Untersuchungen. Die Gleichung heißt dann

$$\frac{dz}{dR_1} = z^2 - sz^3, \qquad s = \frac{r_0}{r_1}, \tag{16}$$

und die eine der zugehörigen Invarianten

$$S = \frac{r_1}{\sqrt{r_0}}\left(\frac{r_1'}{r_1} - \frac{r_0'}{r_0} - \frac{2}{9}\frac{r_1^2}{r_0}\right) = -\frac{r_1^3}{r_0^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{ds}{dR_1} + \frac{2}{9}\right). \tag{17}$$

Ebenso kann man in die transformierte Gleichung (3) die kanonische Variable

$$\mathsf{P}_1 = \int \varrho_1 dx + \text{const.}$$

einführen; dann wird

$$\frac{d\zeta}{d\mathsf{P}_1} = \zeta^2 - \sigma\zeta^3, \qquad \sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}, \tag{18}$$

und dieselbe Invariante

$$S = \frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} - \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} - \frac{2}{9}\frac{\varrho_1^2}{\varrho_0}\right) = -\frac{\varrho_1^3}{\varrho_0^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\sigma}{d\mathsf{P}_1} + \frac{2}{9}\right). \tag{19}$$

Die Quotienten $\frac{r_0}{r_1}$ und $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ sind zunächst Funktionen von x; es empfiehlt sich jedoch, diese Veränderliche in s durch R_1 und in σ durch P_1 zu ersetzen.

Es sollen nun Formeln entwickelt werden, die eine bequeme Lösung folgender Aufgabe gestatten: Angenommen, es sei $s = \frac{r_0}{r_1}$ als Funktion von R_1 gegeben und man kennt außerdem ein partikuläres Integral z_0 der Gleichung (16); wie berechnet man unter diesen Voraussetzungen $\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ als Funktion von P_1?

Wenn man bedenkt, daß $\varrho_1 = \frac{\varrho_0}{\sigma}$ und $\varrho_0 = \mu^2 r_0$ ist, wird aus (19)

$$S = -\frac{\mu^3 r_0^{\frac{3}{2}}}{\sigma^3}\left(\frac{d\sigma}{d\mathsf{P}_1} + \frac{2}{9}\right).$$

Der Ausdruck (17) für S kann diesem gleichgesetzt werden; man erhält

$$\frac{ds}{dR_1} + \frac{2}{9} = w^3\left(\frac{d\sigma}{d\mathsf{P}_1} + \frac{2}{9}\right), \tag{20}$$

wo zur Abkürzung $w = \frac{\mu s}{\sigma}$ geschrieben wurde.

Eine weitere Formel liefert die Untersuchung der Invariante $H = \frac{3\varrho_0'}{\varrho_0} + \frac{2\varrho_1^2}{\varrho_0}$. Es ist wieder $\varrho_1 = \frac{\varrho_0}{\sigma}$, $\varrho_0 = \mu^2 r_0$; folglich $H = \frac{6\mu'}{\mu} + \frac{3r_0'}{r_0} + \frac{2\mu^2 r_0}{\sigma^2}$. Andererseits war $H = \frac{3r_0'}{r_0} + \frac{2r_1^2}{r_0}$. Daraus ergibt sich eine Gleichung für $\frac{\mu'}{\mu}$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{3}\left(\frac{r_1^2}{r_0} - \frac{\mu^2 r_0}{\sigma^2}\right).$$

Man führt die kanonische Variable R_1 ein:

$$3\frac{d\log\mu}{dR_1} = \frac{r_1}{r_0} - \frac{\mu^2 s}{\sigma^2} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{\mu^2 s^2}{\sigma^2}\right).$$

Schließlich findet man

$$3s\frac{d\log\mu}{dR_1} = 1 - w^2,$$

wo w dieselbe Bedeutung hat wie oben. Weiter unten wird gezeigt, daß $3s = \frac{1-w}{z_0}$ ist; infolgedessen ist

$$\frac{d\log\mu}{dR_1} = z_0(w+1). \tag{21}$$

Die Aufstellung einer Gleichung für P_1 als Funktion von R_1 ergibt:

$$\frac{d\mathsf{P}_1}{dR_1} = \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\varrho_0}{\sigma r_1} = \frac{\mu^2 r_0}{\sigma r_1} = \frac{\mu^2 s}{\sigma} = \mu w,$$

$$\frac{d\mathsf{P}_1}{dR_1} = \mu w. \tag{22}$$

Das partikuläre Integral z_0 ist in der Gleichung $\varrho_1 = \mu(r_1 - 3r_0 z_0)$ enthalten. Man bildet den Quotienten $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \frac{\mu r_0}{r_1 - 3r_0 z_0} = \frac{\mu s}{1 - 3sz_0}$. Da andererseits $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \sigma$ ist, wird $1 - 3sz_0 = \frac{\mu s}{\sigma}$, also

$$w = 1 - 3sz_0. \tag{23}$$

Nunmehr kann die oben erwähnte Aufgabe gelöst werden. Aus s und z_0 berechnet man nach (23) die Größe w. Gleichung (21) liefert μ als Funktion von R_1, Gleichung (22) P_1 als Funktion von R_1, σ bestimmt man aus $\frac{\mu s}{w}$; eliminiert man R_1 zwischen den beiden letzten Gleichungen, so findet man σ als Funktion von P_1.

Es soll jetzt vorausgesetzt werden, daß die Differentialgleichung (18) zwischen ζ und P_1 integrabel ist, daß also eine bekannte Gleichung $f(\zeta, \mathsf{P}_1) = \text{const.}$ existiert; dann läßt sich auch die Differentialgleichung (16) zwischen z und R_1 integrieren; denn die oben abgeleiteten Formeln liefern die Übergangsrelationen. Man braucht nur $\zeta = \frac{1}{\mu}(z - z_0)$ zu setzen und P_1 als Funktion von R_1 aus Gleichung (22) zu bestimmen. Da im allgemeinen (16) und (18) ganz verschiedenen Typen angehören, erreicht man durch dieses Verfahren, daß ein neuer Typus von Differentialgleichungen der Integration erschlossen wird.

Die Zweckmäßigkeit dieser Überlegungen soll an einem Beispiel nachgeprüft werden, das schon Elliot unter Benutzung anderer Methoden behandelt hat. Es sei

$$s = -\frac{2}{9} R_1 + \alpha + \beta R_1^{-\frac{1}{2}}, \ \alpha \text{ und } \beta \text{ Konstanten.} \tag{24}$$

Die Differentialgleichung heiße

$$y \frac{dy}{dR_1} = s + y. \tag{25}$$

Sie geht aus (16) durch die Substitution $z = -\frac{1}{y}$ hervor. Es soll bewiesen werden, daß in der zugehörigen Gleichung (18) die Funktion $\sigma = \varkappa \mathsf{P}_1$ ist, $\varkappa$ eine Konstante.

Man braucht zunächst ein partikuläres Integral von (25); es gibt ein solches von der Form

$$y_0 = \varepsilon_0 R_1 + \varepsilon_1 R_1^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2.$$

Wenn $\beta \neq 0$ ist, wird $\varepsilon_0 = +\frac{2}{3}$, und ε_1 ist eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$\varepsilon_1^3 - 2\alpha\varepsilon_1 - \frac{4}{3}\beta = 0,$$

während $\varepsilon_2 = \frac{2\beta}{\varepsilon_1}$ ist. — Gleichung (23) liefert die Funktion $w = \frac{3}{2}\varepsilon_1 R_1^{-\frac{1}{2}}$. Zur Berechnung von σ bedient man sich in diesem Falle am besten der Gleichung (20); setzt

man die angegebenen Ausdrücke für s und w ein, so findet man

$$\sigma = \varkappa \mathsf{P}_1, \text{ wo } \varkappa = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\frac{\alpha}{\varepsilon_1^2}$$

ist. Da ε_1 einer kubischen Gleichung genügt, gibt es im allgemeinen drei Werte für die Konstante $\varkappa$.

Man führe nun in (18) an Stelle von ζ die Funktion $\eta = -\frac{1}{\zeta}$ ein; die Differentialgleichung für η wird homogen:

$$\frac{d\eta}{d\mathsf{P}_1} = 1 + \frac{\varkappa \mathsf{P}_1}{\eta}, \tag{26}$$

und ihr allgemeines Integral heißt $(\eta - \alpha_1 \mathsf{P}_1)^{n_1} (\eta - \alpha_2 \mathsf{P}_1)^{n_2} = \text{const.}$, wo

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4\varkappa + 1}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4\varkappa + 1}),$$

$$n_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{4\varkappa + 1}}\right), \quad n_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4\varkappa + 1}}\right)$$

ist. Um das allgemeine Integral von (25) zu erhalten, setze man

$$\eta = \frac{\mu y_0 y}{y - y_0}$$

und bestimme aus den Gleichungen (21) und (22) die Funktionen μ und P_1 von R_1. Die Ergebnisse sind

$$\mu = (1 - \beta_1 \tau)^{\nu_1} (1 - \beta_2 \tau)^{\nu_2},$$

$$\mathsf{P}_1 = \frac{9}{2}\varepsilon_1^2 \int (1 - \beta_1 \tau)^{\nu_1} (1 - \beta_2 \tau)^{\nu_2} d\tau .$$

Hierin wurde zur Abkürzung $\tau = \frac{2}{3\varepsilon_1} R_1^{+\frac{1}{2}}$ gesetzt, ferner

$$\beta_1 = \frac{1}{2(9\varkappa + 2)}(1 - 3\sqrt{4\varkappa + 1}), \quad \beta_2 = \frac{1}{2(9\varkappa + 2)}(1 + 3\sqrt{4\varkappa + 1}),$$

$$\nu_1 = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3\sqrt{4\varkappa + 1}}{\sqrt{4\varkappa + 1}}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 3\sqrt{4\varkappa + 1}}{\sqrt{4\varkappa + 1}}.$$

Man kann beweisen, daß für die spezielle Differentialgleichung (26) die früher erwähnte absolute Invariante

$$L = 3^{-\frac{1}{3}} K^{\frac{2}{3}} \left(\frac{d \log S}{dx} - \frac{1}{2} H\right) S^{-\frac{2}{3}}$$

sich auf eine Konstante reduziert. Da $\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \varkappa \mathsf{P}_1$ ist, folgt zunächst aus (19)

$$\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_0}} = \varkappa_1 S^{\frac{1}{3}}, \qquad \varkappa_1 = -\sqrt[3]{\frac{9}{9\varkappa + 2}}.$$

Nun genügt der Quotient $\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_0}}$ der Differentialgleichung (4):

$$\frac{d\varrho}{dx} = S + \frac{1}{6} H\varrho - \frac{1}{9}\varrho^3.$$

Es ergibt sich also eine Beziehung zwischen S, S' und H, die man leicht in die Form $\left(\frac{d \log S}{dx} - \frac{1}{2} H\right) S^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\varkappa_1}\left(1 - \frac{\varkappa_1^3}{9}\right)$ bringen kann. — Auch für die Differentialgleichung

(25), in der $s = -\frac{2}{9} R_1 + \alpha + \beta R_1^{-\frac{1}{2}}$ ist, läßt sich die Invariante L berechnen. Es versteht sich von selbst, daß auch sie sich auf eine Konstante reduziert.

Gleichung (25) ist ein besonderer Fall einer allgemeineren, in der

$$s = A_0 R_1 + A_1 R_1^{\frac{1}{2}} + A_2 + A_3 R_1^{-\frac{1}{2}}$$

ist, und diese wiederum hängt aufs engste mit einer anderen, nämlich

$$y \frac{dy}{dx} = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 + (a_0 x + a_1) y$$

zusammen. Führt man in letztere an Stelle von x die Veränderliche $R_1 = \frac{1}{2} a_0 \left(x + \frac{a_1}{a_0} \right)^2$ ein, so wird

$$y \frac{dy}{dR_1} = y + A_0 R_1 + A_1 R_1^{\frac{1}{2}} + A_2 + A_3 R_1^{-\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Die konstanten Koeffizienten haben folgende Werte:

$$A_0 = \frac{2 b_0}{a_0^2},$$

$$A_1 = \frac{(a_0 b_1 - 3 a_1 b_0) \sqrt{2}}{a_0^{\frac{5}{2}}},$$

$$A_2 = \frac{a_0^2 b_2 - 2 a_0 a_1 b_1 + 3 a_1^2 b_0}{a_0^3},$$

$$A_3 = \frac{(a_0^3 b_3 - a_0^2 a_1 b_2 + a_0 a_1^2 b_1 - a_1^3 b_0) \sqrt{2}}{2 a_0^{\frac{7}{2}}}.$$

Wenn $A_0 = -\frac{2}{9}$ und $A_1 = 0$ ist, ergeben sich zwischen den a_k und b_k die Beziehungen $b_0 = -\frac{1}{9} a_0^2$, $b_1 = -\frac{1}{3} a_0 a_1$, die schon früher in einem anderen Zusammenhange aufgestellt wurden.

Die Gleichung (27) besitzt im allgemeinen kein partikuläres Integral von der Form $y_0 = \varepsilon_0 R_1 + \varepsilon_1 R_1^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2$; es muß eine Relation zwischen den Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3 bestehen, wenn diese Voraussetzung erfüllt sein soll. Man erhält zunächst

$$A_0 = \varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1), \quad A_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1(3\varepsilon_0 - 2), \quad A_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_0 - 1) + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2, \quad A_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Das sind vier Gleichungen zwischen den drei Größen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, die man zu eliminieren hat. Schreibt man zur Abkürzung

$$B_* = 27 A_0^2 A_3 - 9 A_0 A_1 A_2 + 2 A_1^3 + 9 A_0 A_3 - A_1 A_2,$$
$$C_* = 27 A_0 A_3 - 3 A_1 A_2 + 8 A_3,$$

so heißt das Ergebnis

$$B_*^2 + B_* C_* - A_0 C_*^2 = 0.$$

In dem Falle der transformierten Jacobischen Differentialgleichung, d. h. wenn

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3}, \quad A_0 = -\frac{2}{9}, \quad A_1 = 0$$

ist, ist diese Bedingung erfüllt.

Zweites Kapitel.
Partikuläre Integrale, welche Wurzeln einer algebraischen Gleichung sind.

1. Die n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sollen die Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y \tag{14}$$

befriedigen und gleichzeitig Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$F = y^n + f_1 y^{n-1} + f_2 y^{n-2} + \cdots + f_{n-1} y + f_n = 0 \tag{28}$$

sein. Die Koeffizienten f_k seien gegebene Funktionen von x, und zwar algebraische, wenn nichts anderes vorausgesetzt wird. Man differenziert die Gleichung $F = 0$ vollständig nach x und ersetzt $\frac{dy}{dx}$ durch den Ausdruck (14). Die entstehende algebraische Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y}(r_0 + r_1 y) + y\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ist vom n-ten Grade in bezug auf y und heißt ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} &y^n(nr_1 + f_1') + y^{n-1}\{(n-1)r_1 f_1 + nr_0 + f_2'\} + y^{n-2}\{(n-2)r_1 f_2 + (n-1)r_0 f_1 + f_3'\} \\ &\quad + y^{n-3}\{(n-3)r_1 f_3 + (n-2)r_0 f_2 + f_4'\} + \cdots \\ &\quad + y^2(2r_1 f_{n-2} + 3r_0 f_{n-3} + f_{n-1}') + y(r_1 f_{n-1} + 2r_0 f_{n-2} + f_n') + r_0 f_{n-1} = 0\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Es liegen nun zwei Möglichkeiten vor: Entweder ist (29) eine Identität, d. h. die Koeffizienten in den Klammern verschwinden für jeden Wert von x. Das gäbe, abgesehen von $f_{n-1} = 0$, n Differentialgleichungen für die f_k, immer vorausgesetzt, daß $r_0 \neq 0$ ist. Es handelt sich um einen Ausnahmefall. Oder aber (29) ist keine Identität; dann sind dieselben Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, welche der algebraischen Gleichung (28) genügten, auch Wurzeln von (29), d. h. es müssen die Koeffizienten beider Gleichungen, nachdem man (29) durch $nr_1 + f_1'$ dividiert hat, übereinstimmen; das gibt wiederum n Differentialgleichungen für die f_k, nämlich

$$\begin{cases} f_2' - f_1(f_1' + r_1) + nr_0 = 0, \\ f_3' - f_2(f_1' + 2r_1) + (n-1)r_0 f_1 = 0, \\ f_4' - f_3(f_1' + 3r_1) + (n-2)r_0 f_2 = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n' - f_{n-1}\{f_1' + (n-1)r_1\} + 2r_0 f_{n-2} = 0\,, \\ \quad - f_n(f_1' + nr_1) + r_0 f_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Die Relationen für den Ausnahmefall würden aus (30) dadurch hervorgehen, daß man noch die Bedingung $f_1' = -nr_1$ hinzufügt.

Wenn man die Funktionen r_0 und r_1 als gegeben betrachtet, ist im allgemeinen die Bestimmung der Koeffizienten f_k schwierig. Aus diesem Grunde beschränken sich die folgenden Untersuchungen hauptsächlich auf Gleichungen, die in bezug auf y vom zweiten oder dritten Grade sind.

2. Die partikulären Integrale y_1 und y_2 mögen der *quadratischen Gleichung*

$$y^2 + 2fy + g = 0$$

genügen. Unter Abänderung der Bezeichnung ist also $f_1 = 2f$, $f_2 = g$ gesetzt worden. Zwischen den Funktionen r_0, r_1, f, g bestehen die Gleichungen

$$2r_0 - 2r_1 f = 4ff' - g', \qquad r_0 f - r_1 g = f'g\,,$$

die man nach r_0 und r_1 auflösen kann. Es sei die Diskriminante $D = 4(f^2 - g)$ von Null verschieden, dann ist

$$r_0 = -\frac{1}{2}g\frac{d\log D}{dx}, \qquad r_1 = -\frac{1}{2}f\frac{d\log(f^2 D)}{dx}. \tag{31}$$

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich nun mit einer speziellen Klasse von Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man die einschränkende Voraussetzung macht, daß nicht allein die Koeffizienten r_0 und r_1, sondern auch f und g *ganze rationale Funktionen* von x sind.

Besonders einfach liegen die Dinge für $r_1 = 1$. Aus der zweiten Gleichung (31) folgt $\frac{d \log (f^2 D)}{dx} = -\frac{2}{f}$. Die ganze Funktion $f^2 D$ sei gleich G; es ist daher $f = -\frac{2G}{G'}$. Da f selbst eine ganze rationale Funktion sein sollte, ist G durch G' teilbar und f eine lineare Funktion von x, die man in die Form

$$f = -\frac{2}{n+3}(x - x_0), \quad n \text{ und } x_0 \text{ Konstanten},$$

bringen kann. Man bestimmt $G = f^2 D$ aus der Gleichung

$$G = e^{-2\int \frac{dx}{f}} = \gamma_1 (x - x_0)^{n+3}, \quad \gamma_1 \text{ eine Konstante},$$

und findet die Diskriminante $D = \frac{\gamma_1 (n+3)^2}{4} (x - x_0)^{n+1}$. Der Koeffizient g in der quadratischen Gleichung ist

$$g = f^2 - \frac{1}{4} D = \frac{4}{(n+3)^2} (x - x_0)^2 - \frac{1}{16} \gamma_1 (n+3)^2 (x - x_0)^{n+1}.$$

Die erste Gleichung (31) gibt endlich r_0:

$$r_0 = -\frac{2(n+1)}{(n+3)^2} (x - x_0) + \frac{1}{32} \gamma_1 (n+1)(n+3)^2 (x - x_0)^n.$$

Wenn g und r_0 ganze rationale Funktionen sind, ist n eine positive ganze Zahl. Als Ergebnis dieser Überlegungen ist also die Differentialgleichung

$$(32) \quad y \frac{dy}{dx} = y - \frac{2(n+1)}{(n+3)^2} (x - x_0) + \gamma (x - x_0)^n, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1}{32} (n+1)(n+3)^2,$$

ermittelt worden, die zwei partikuläre Integrale besitzt, welche der Gleichung

$$y^2 - \frac{4}{n+3} (x - x_0)\, y + \frac{4}{(n+3)^2} (x - x_0)^2 - \frac{1}{16} \gamma_1 (n+3)^2 (x - x_0)^{n+1} = 0$$

genügen.

Man kann auf die beiden Variablen x und y in (32) die lineare Transformation $x = \beta_0 + \beta_1 t$, $y = \alpha u$ anwenden und die Konstanten β_0, β_1, α so bestimmen, daß die Form der Gleichung bestehen bleibt, insbesondere der Faktor von u auf der rechten Seite gleich 1 wird. Es ist nur nötig, $\beta_1 = \alpha$ zu setzen. Man gelangt so zu der Gleichung

$$u \frac{du}{dt} = u - \frac{2(n+1)}{(n+3)^2} (t - t_0) + \varkappa (t - t_0)^n,$$

und es ist möglich, über β_0 und α so zu verfügen, daß t_0 und $\varkappa$ vorgeschriebene Werte annehmen, $\varkappa = 0$ ausgeschlossen. Unter keinen Umständen ändert sich aber der Koeffizient des linearen Gliedes $t - t_0$; er behält den Wert $-\frac{2(n+1)}{(n+3)^2}$, der schon in Gleichung (32) als Faktor von $x - x_0$ auftrat.

Weiter unten wird gezeigt werden, daß sich Differentialgleichungen von der Form (32) stets allgemein integrieren lassen.

Es soll jetzt der allgemeine Fall erledigt werden, daß r_1 eine ganze Funktion vom Grade $k - 1$ ist, $k > 1$:

$$r_1 = c(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_{k-1}).$$

In $r_1 = -\frac{1}{2} f \frac{d \log (f^2 D)}{dx}$ wird für $x = \infty$ die linke Seite von der Ordnung $k - 1$ unendlich, die logarithmische Ableitung auf der rechten von der ersten Ordnung Null; folglich ist f eine ganze Funktion vom Grade k:

$$f = -a(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_k).$$

$f^2 D$ berechnet man aus

$$\log (f^2 D) = + \frac{2c}{a} \int \frac{(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_{k-1})}{(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_k)} dx.$$

Es ist nun nötig, einige Festsetzungen in bezug auf die Konstanten β_ν und γ_ν zu treffen. Die folgenden Untersuchungen beschränken sich, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, auf die Annahme, daß alle β_ν von einander verschieden, alle γ_ν verschieden sind und daß kein Linearfaktor des Nenners mit einem Faktor des Zählers übereinstimmt. Dann läßt sich die Funktion unter dem Integralzeichen folgendermaßen in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{2c}{a} \frac{(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_{k-1})}{(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_k)} = \frac{m_1}{x - \gamma_1} + \frac{m_2}{x - \gamma_2} + \cdots + \frac{m_k}{x - \gamma_k}. \tag{33}$$

Für die Diskriminante findet man

$$D = 4C(x - \gamma_1)^{m_1 - 2} (x - \gamma_2)^{m_2 - 2} \cdots (x - \gamma_k)^{m_k - 2},$$

wo in C die Integrationskonstante enthalten ist. Ferner ist

$$g = f^2 - \frac{1}{4} D = a^2 (x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \cdots (x - \gamma_k)^2 - C(x - \gamma_1)^{m_1 - 2} (x - \gamma_2)^{m_2 - 2} \cdots (x - \gamma_k)^{m_k - 2}.$$

Es sei zur Abkürzung $\Phi = \frac{1}{2} f^2 \frac{d \log D}{dx}$ gesetzt; diese ganze Funktion ist vom Grade $2k - 1$ und verschwindet für jeden der Werte $x = \gamma_\nu$ von der ersten Ordnung,

$$\Phi = \frac{1}{2} a^2 (x - \gamma_1)^2 (x - \gamma_2)^2 \cdots (x - \gamma_k)^2 \left\{ \frac{m_1 - 2}{x - \gamma_1} + \frac{m_2 - 2}{x - \gamma_2} + \cdots + \frac{m_k - 2}{x - \gamma_k} \right\}.$$

Man erhält

$$r_0 = -\Phi \frac{g}{f^2} = -\Phi \left(1 - \frac{D}{4f^2}\right),$$

$$r_0 = -\Phi \left\{ 1 - \frac{C}{a^2} (x - \gamma_1)^{m_1 - 4} (x - \gamma_2)^{m_2 - 4} \cdots (x - \gamma_k)^{m_k - 4} \right\}. \tag{34}$$

Da die Koeffizienten g und r_0 ganze Funktionen sein sollten, sind die m_ν ganze Zahlen und größer als 2.

Zwischen den Konstanten a, c, β_ν, γ_ν, m_ν bestehen k Relationen, die man aus (33) ableiten kann, wenn man berücksichtigt, daß die Gleichung für jeden Wert von x erfüllt wird. Angenommen, es seien die γ_ν, m_ν, a, C gegeben — das sind die Konstanten, die in der Funktion r_0 auftreten — dann berechnet man zunächst die β_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, k - 1$, indem man in (33) diese Werte für x einsetzt; sie genügen der Gleichung

$$\frac{m_1}{\beta - \gamma_1} + \frac{m_2}{\beta - \gamma_2} + \cdots + \frac{m_k}{\beta - \gamma_k} = 0,$$

welche in bezug auf β vom Grade $k - 1$ ist. Den Koeffizienten c in r_1 ermittelt man in der Weise, daß man (33) mit dem Nenner $(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_k)$ multipliziert und die Faktoren von x^{k-1} auf beiden Seiten gleichsetzt,

$$c = \frac{a}{2} (m_1 + m_2 + \cdots + m_k).$$

Das Ergebnis dieser Überlegungen ist also, daß r_1 vollständig bestimmt ist, wenn die Funktion r_0 mit allen ihren Konstanten gegeben ist, und dasselbe gilt auch für die Koeffizienten f und g der quadratischen Gleichung, der die beiden partikulären Integrale genügen.

3. Die Wurzeln y_1, y_2, y_3 der *kubischen Gleichung*

$$y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0$$

seien partikuläre Integrale von $yy' = r_0 + r_1 y$; die Koeffizienten f_1, f_2, f_3 unterliegen den Bedingungsgleichungen

$$(35) \qquad \begin{cases} 3r_0 - (r_1 + f_1') f_1 + f_2' = 0, \\ 2r_0 f_1 - (2r_1 + f_1') f_2 + f_3' = 0, \\ r_0 f_2 - (3r_1 + f_1') f_3 = 0. \end{cases}$$

Die f_k sind nicht von einander unabhängig; denn eliminiert man r_0 und r_1, so wird

$$(4f_1^2 f_3 - f_1 f_2^2 - 3f_2 f_3) f_1' - (6f_1 f_3 - 2f_2^2) f_2' + (9f_3 - f_1 f_2) f_3' = 0.$$

Für die Funktion r_0 kann man einen Ausdruck aufstellen, der sich durch seine übersichtliche Gestalt auszeichnet. Es sei D die Diskriminante der kubischen Gleichung,

$$D = (y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2,$$

dann ist

$$\frac{d \log D}{dx} = 2\left(\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} + \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} + \frac{y_2' - y_3'}{y_2 - y_3}\right).$$

Nun war $y_k' = \frac{r_0}{y_k} + r_1$, $k = 1, 2, 3$, folglich

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} = -\frac{r_0}{y_1 y_2}, \quad \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = -\frac{r_0}{y_1 y_3}, \quad \frac{y_2' - y_3'}{y_2 - y_3} = -\frac{r_0}{y_2 y_3},$$

$$\frac{d \log D}{dx} = -\frac{2r_0 (y_3 + y_2 + y_1)}{y_1 y_2 y_3} = -\frac{2r_0 f_1}{f_3},$$

$$(36) \qquad r_0 = -\frac{f_3}{2f_1} \frac{d \log D}{dx}.$$

Wenn nichts anderes festgesetzt wird, soll im folgenden die Diskriminante D von Null verschieden sein.

Durch Einsetzen des letzten Ausdruckes für r_0 in die Formeln (35) ergeben sich drei Darstellungen für die Funktion r_1:

$$(37) \qquad \begin{cases} r_1 = -\frac{3}{2} \frac{f_3}{f_1^2} \frac{d \log D}{dx} + \frac{f_2'}{f_1} - f_1', \\ r_1 = -\frac{1}{2} \frac{f_3}{f_2} \frac{d \log \left(\frac{D}{f_3}\right)}{dx} - \frac{1}{2} f_1', \\ r_1 = -\frac{1}{6} \frac{f_2}{f_1} \frac{d \log D}{dx} - \frac{1}{3} f_1'. \end{cases}$$

Die allgemeine Diskussion der Gleichungen (35) bis (37), unter denen nur drei von einander unabhängig sind, scheint schwierig zu sein; deshalb möge eine besondere Voraussetzung hinzugefügt werden, welche das Problem erleichtert, allerdings den Umfang der in Betracht kommenden Funktionen erheblich einschränkt; es sei

$$f_1' = -\varkappa r_1, \quad \varkappa \text{ eine Konstante.}$$

Es wird sich zeigen, daß diese Annahme zu bemerkenswerten Typen von Differentialgleichungen führt.

Man setze in (35) $f_1 = -\varkappa R_1$, $R_1 = \int r_1\,dx + \text{const.}$, $\frac{r_0}{r_1} = s$; dann ist

$$s = \frac{1}{3}\varkappa(\varkappa-1)\,R_1 - \frac{1}{3}\frac{df_2}{dR_1}, \qquad 2\varkappa R_1 s + f_2(2-\varkappa) - \frac{df_3}{dR_1} = 0, \qquad s = \frac{(3-\varkappa)f_3}{f_2}.$$

Die Funktion s wird mittels der ersten und dritten Gleichung eliminiert,

$$f_3 = \frac{1}{3(\varkappa-3)} f_2 \frac{df_2}{dR_1} - \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{3(\varkappa-3)} R_1 f_2.$$

Diesen Wert, sowie den ersten für s setzt man in die zweite Gleichung ein; das Ergebnis ist eine Differentialgleichung für f_2 als Funktion von R_1,

$$f_2\frac{d^2f_2}{dR_1^2} + \left(\frac{df_2}{dR_1}\right)^2 + \varkappa(\varkappa-5)R_1\frac{df_2}{dR_1} + 2(\varkappa^2-7\varkappa+9)f_2 - 2\varkappa^2(\varkappa-1)(\varkappa-3)R_1^2 = 0\,.$$

Eine neue Funktion ψ wird durch $f_2 = R_1^2\psi$ definiert; man bestimmt sie aus der Gleichung

$$R_1^2\left\{\psi\frac{d^2\psi}{dR_1^2} + \left(\frac{d\psi}{dR_1}\right)^2\right\} + 8R_1\psi\frac{d\psi}{dR_1} + \varkappa(\varkappa-5)R_1\frac{d\psi}{dR_1} + 2\{\psi + (\varkappa-1)(\varkappa-3)\}(3\psi-\varkappa^2) = 0,$$

deren Form anzeigt, daß sie sich in eine andere von der *ersten Ordnung* transformieren läßt.

In der Tat, schreibt man $\varphi = R_1\psi\frac{d\psi}{dR_1}$, so wird

$$\varphi\frac{d\varphi}{d\psi} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1\varphi, \tag{38}$$

wo

$$\bar{r}_0 = -2\psi\{\psi + (\varkappa-1)(\varkappa-3)\}(3\psi-\varkappa^2),$$
$$\bar{r}_1 = -\{7\psi + \varkappa(\varkappa-5)\}$$

ist. Hat man nun irgendein Integral von (38) ermittelt, also φ als Funktion von ψ dargestellt, so bestimmt man ψ als Funktion von R_1, indem man die Relation

$$\frac{\psi d\psi}{\varphi} = \frac{dR_1}{R_1}$$

benutzt; alsdann gibt

$$f_2 = R_1^2\psi$$

die Funktion f_2 von R_1, und endlich erhält man

$$f_3 = \frac{sf_2}{3-\varkappa}, \qquad s = \frac{1}{3}\varkappa(\varkappa-1)R_1 - \frac{1}{3}\frac{df_2}{dR_1}.$$

Damit sind nicht nur die Koeffizienten f_1, f_2, f_3 der kubischen Gleichung gefunden, deren Wurzeln partikuläre Integrale sind, sondern auch die Funktion $s = \frac{r_0}{r_1}$, d. h. also die Form der Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dR_1} = s + y,$$

zu der jene partikulären Integrale gehören.

Die Gestalt der Gleichung (38) erinnert an frühere Untersuchungen; die Koeffizienten $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_0$ sind ganze Funktionen ersten bzw. dritten Grades der Veränderlichen ψ und hängen außerdem von einem Parameter $\varkappa$ ab, über den man verfügen kann. Die allgemeine Integration ist wohl noch nicht möglich; aber es gibt für spezielle Werte von $\varkappa$ partikuläre Integrale von (38), die sich für die Herstellung von Sonderlösungen verwerten lassen. Ein solches Integral sei $\varphi_0 = c_0(\psi-\beta_2)(\psi-\beta_3)$.

Da die Gleichung

$$\frac{\bar{r}_0}{\varphi_0} = \frac{d\varphi_0}{d\psi} - \bar{r}_1 \tag{39}$$

besteht, deren rechte Seite von ganzen Funktionen gebildet wird, muß r_0 durch φ_0 teilbar sein. Es liegen nun drei Möglichkeiten vor,

I. $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -(\varkappa - 1)(\varkappa - 3)$,

II. $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = \frac{1}{3}\varkappa^2$,

III. $\beta_2 = -(\varkappa - 1)(\varkappa - 3)$, $\beta_3 = \frac{1}{3}\varkappa^2$.

Untersuchung des Falles I: Es ist

$$\varphi_0 = c_0\psi[\psi + (\varkappa - 1)(\varkappa - 3)], \quad \frac{\bar{r}_0}{\varphi_0} = -\frac{2}{c_0}(3\psi - \varkappa^2),$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\psi} = 2c_0\psi + c_0(\varkappa - 1)(\varkappa - 3), \quad \bar{r}_1 = -7\psi - \varkappa(\varkappa - 5).$$

Wenn man diese Ausdrücke in (39) einsetzt, entsteht eine Gleichung $A\psi + B = 0$, die für jeden Wert von ψ gelten muß. Es ist daher

$$A = 2c_0^2 + 7c_0 + 6 = 0, \quad B = c_0^2(\varkappa - 1)(\varkappa - 3) + c_0\varkappa(\varkappa - 5) - 2\varkappa^2 = 0.$$

Aus $A = 0$ erhält man zwei Lösungen $c_0 = -\frac{3}{2}$ und $c_0 = -2$; die letztere soll ausgeschlossen werden; sie führt nämlich, wie weiter unten gezeigt wird, auf Differentialgleichungen, die nur ein geringes Interesse besitzen. Zu der übrigbleibenden Lösung $c_0 = -\frac{3}{2}$ gehören zwei Werte $\varkappa = +\frac{9}{5}$ und $\varkappa = -3$. Nunmehr sind die Koeffizienten in $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$ und φ_0 zahlenmäßig bestimmt.

Die *Untersuchung des Falles* II erfolgt in derselben Weise; es ist wiederum $c_0 = -\frac{3}{2}$ oder $c_0 = -2$; und wenn man den ersten dieser beiden Werte zugrunde legt, erhält man $\varkappa = +\frac{12}{5}$ und $\varkappa = +2$.

Bevor der Fall III behandelt wird, sollen aus den letzten Untersuchungen einige Folgerungen gezogen werden. Da

$$\varphi_0 = c_0\psi(\psi - \beta_3)$$

ist, bestimmt man ψ als Funktion von R_1 aus

$$\frac{d\psi}{\psi - \beta_3} = c_0\frac{dR_1}{R_1}.$$

Die Integration gibt

$$\psi = \beta_3 + \gamma_1 R_1^{c_0}, \quad \gamma_1 \text{ eine Konstante.}$$

Ferner ist

$$f_2 = \beta_3 R_1^2 + \gamma_1 R_1^{c_0+2},$$

$$s = \frac{1}{3}[\varkappa(\varkappa - 1) - 2\beta_3]R_1 - \frac{1}{3}\gamma_1(c_0 + 2)R_1^{c_0+1},$$

$$f_3 = +\frac{f_2 s}{3 - \varkappa}.$$

Der Ausschluß der Lösung $c_0 = -2$ rechtfertigt sich jetzt; für diesen Wert wäre nämlich

$s = \varkappa_0 R_1$, $\varkappa_0$ eine Konstante, und man erhielte eine Differentialgleichung

$$y \frac{dy}{dR_1} = \varkappa_0 R_1 + y,$$

über die sich nichts Neues sagen ließe. Es sei also $c_0 = -\frac{3}{2}$, dann findet man unter Berücksichtigung der vier Werte von $\varkappa$ folgende Ausdrücke für die charakteristische Funktion s:

$$(40) \qquad \begin{cases} \varkappa = +2, & s = -\frac{2}{9} R_1 - \frac{1}{6} \gamma_1 R_1^{-\frac{1}{2}}, \\ \varkappa = -3, & s = +20 R_1 - \frac{1}{6} \gamma_1 R_1^{-\frac{1}{2}}, \\ \varkappa = +\frac{9}{5}, & s = -\frac{4}{25} R_1 - \frac{1}{6} \gamma_1 R_1^{-\frac{1}{2}}, \\ \varkappa = +\frac{12}{5}, & s = -\frac{4}{25} R_1 - \frac{1}{6} \gamma_1 R_1^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Die erste Funktion s für $\varkappa = +2$ ist ein spezieller Fall der Gleichung (24), wenn man darin $\alpha = 0$ setzt; man gelangt zu der transformierten Jacobischen Differentialgleichung, die allgemein integrierbar ist. Es fällt auf, daß für $\varkappa = \frac{9}{5}$ und $\varkappa = \frac{12}{5}$ dieselbe Funktion s zustande kommt. Das bedeutet, es gibt zwei verschiedene kubische Gleichungen

$$y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0,$$

deren Wurzeln partikuläre Integrale derselben Differentialgleichung sind. Letztere sowie die entsprechende für $\varkappa = -3$ lassen sich, wie später gezeigt wird, ebenfalls allgemein integrieren. Was nun die Koeffizienten f_1, f_2, f_3 betrifft, so ist deren Form in allen vier Fällen, abgesehen von den darin auftretenden Konstanten, dieselbe:

$$f_1 = -\varkappa R_1, \quad f_2 = \varkappa_1 R_1^2 + \varkappa_2 R_1^{\frac{1}{2}}, \quad f_3 = \varkappa_3 R_1^3 + \varkappa_4 R_1^{\frac{3}{2}} + \varkappa_5 .$$

Die Bestimmung der Zahlenwerte für die $\varkappa_\nu$ bietet keine Schwierigkeiten; von Bedeutung ist nur, daß die Diskriminanten von Null verschieden sind.

Untersuchung des Falles III: Es ist $\beta_2 = -(\varkappa - 1)(\varkappa - 3)$, $\beta_3 = \frac{1}{3}\varkappa^2$. Die Werte c_0 und $\varkappa$ genügen den beiden Gleichungen

$$2c_0^2 + 7c_0 + 6 = 0, \quad c_0(2\varkappa^2 - 12\varkappa + 9) + 3\varkappa(\varkappa - 5) = 0.$$

Die erste gibt wieder $c_0 = -\frac{3}{2}$ und $c_0 = -2$; beide Lösungen sind brauchbar. Dem Werte $c_0 = -\frac{3}{2}$ entspricht $\varkappa = +\frac{9}{2}$, während zu $c_0 = -2$ die Werte $\varkappa = +6$ und $\varkappa = +3$ gehören. Der letztere muß hier ausgeschlossen werden, weil für ihn die Darstellung des Koeffizienten $f_3 = \frac{s f_2}{3 - \varkappa}$ versagt.

Da $\varphi_0 = c_0(\psi - \beta_2)(\psi - \beta_3)$ ist und keine der beiden Konstanten β_2 und β_3 verschwindet, bestimmt man ψ als Funktion von R_1 aus der Gleichung

$$\frac{\psi \, d\psi}{(\psi - \beta_2)(\psi - \beta_3)} = c_0 \frac{dR_1}{R_1}.$$

Das Ergebnis der Integration ist

$$\frac{(\psi - \beta_3)^{\beta_3}}{(\psi - \beta_2)^{\beta_2}} = \gamma_0 R_1^{c_0(\beta_3 - \beta_2)}, \quad \gamma_0 \text{ eine Konstante.}$$

Wenn $c_0 = -2$ und $\varkappa = +6$ ist, genügt ψ einer algebraischen Gleichung vom Grade 9:

$$(\psi - 12)^4 (\psi + 15)^5 = \gamma R_1^{-18}.$$

Ist dagegen $c_0 = -\frac{3}{2}$ und $\varkappa = +\frac{9}{2}$, so ist die Gleichung vom Grade 16:

$$\left(\psi - \frac{27}{4}\right)^9 \left(\psi + \frac{21}{4}\right)^7 = \gamma R_1^{-24}.$$

4. Bei seinen Untersuchungen über die Multiplikation des Argumentes der elliptischen Funktionen hat Halphen[3]) die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3x(x+1) - 4t}{t(8x-1)} \tag{41}$$

einem eingehenden Studium unterzogen und gezeigt, daß man sie allgemein integrieren kann, und zwar entweder in algebraischer Form oder aber, indem man die beiden Größen x und t als elliptische Funktionen einer Hilfsvariablen darstellt. Setzt man

$$3x(x+1) - 4t = y,$$

so ist es möglich, t zu eliminieren; die neue Differentialgleichung zwischen y und x heißt dann

$$y\frac{dy}{dx} = -3x(x+1)(8x-1) + 2(7x+1)y; \tag{42}$$

sie hat die Form $y\frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y$, wo die ganzen Funktionen r_0 und r_1 vom dritten bzw. ersten Grade sind. Halphen gibt für die Differentialgleichung (41) eine Anzahl partikulärer Integrale an, nämlich

$$\begin{aligned} P &= (32t + 8x^2 - 20x - 1)^2 + (8x-1)^3 = 0, \\ Q &= 16t^2 + 8t(x+1)(x-2) + (x+1)^4 = 0, \\ R &= 64t^3 + 24(2x^2 - 2x + 5)t^2 + 12(x+1)^3(x-2)t + (x+1)^6 = 0^4). \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen sind in bezug auf t vom zweiten, die letzte vom dritten Grade. Die entsprechenden Integrale von (42) lassen sich leicht berechnen:

$$(43)\quad \begin{cases} \frac{1}{64}P = y^2 - \frac{1}{4}(4x+1)(8x-1)y + \frac{1}{4}x(x+1)(8x-1)^2 = 0, \\ \quad Q = y^2 - 4(x+1)(2x-1)y + (x+1)^2(2x-1)(8x-1) = 0, \\ -R = y^3 - \frac{3}{2}(8x^2+4x+5)y^2 + 3(x+1)(16x^3+3x^2+12x-2)y \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}(x+1)^2(8x-1)(16x^3+3x^2+12x-2) = 0. \end{cases}$$

Die zugehörigen Diskriminanten sind

$$D_p = -\frac{1}{16}(8x-1)^3, \qquad D_q = -12(x+1)^2(2x-1),$$

$$D_r = -\frac{3^6}{2^2}(x+1)^6(16x^3+3x^2+12x-2).$$

Da keine von ihnen identisch verschwindet, definieren die quadratischen und kubischen Gleichungen sieben verschiedene partikuläre Integrale der transformierten Halphenschen

---

[3]) Halphen, Sur la multiplication des fonctions elliptiques, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 88 (1879), p. 414; Sur l'intégration d'une équation différentielle, ebenda, p. 562.

[4]) Bei Halphen ist der Koeffizient von $(x+1)^3(x-2)t$ gleich 6; eine Nachprüfung ergibt aber den Zahlenwert 12.

Differentialgleichung (42); dazu kommt als achtes die ganze Funktion zweiten Grades

$$y_0 = 3x(x+1),$$

die schon bei einer früheren Gelegenheit erwähnt wurde.

Die Ergebnisse, welche in den Formeln (43) niedergelegt sind, sind gute Musterbeispiele für die allgemeinen Untersuchungen am Anfange dieses Kapitels. Bestimmt man nämlich die Koeffizienten f, g, f_1, f_2, f_3 in den quadratischen und kubischen Gleichungen, so kann man sich davon überzeugen, daß sie die Bedingungen (31), (35) und (36) erfüllen.

Eine zweite bemerkenswerte Transformation erhält man, wenn man in (41) an Stelle von x und t zwei neue Veränderliche η und ξ durch die Gleichungen

$$x = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{10\eta}{\xi}\right), \quad t = 2^{-8}\,3^3\,\xi^{-\frac{8}{3}}$$

einführt. Es ergeben sich zunächst folgende Relationen:

$$t(8x-1)\frac{dx}{dt} = -2^{-4}\cdot 3\cdot 5^2\,\xi^{-2}\left(\xi\eta\frac{d\eta}{d\xi} - \eta^2\right),$$

$$3x(x+1) - 4t = 2^{-6}\cdot 3\,\xi^{-2}(3^2\xi^2 - 2^2\cdot 5^2\xi\eta + 2^2\cdot 5^2\eta^2 - 3^2\xi^{-\frac{2}{3}}).$$

Setzt man diese Ausdrücke einander gleich, so entsteht die gesuchte Differentialgleichung zwischen ξ und η,

$$\eta\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{3^2}{2^2\,5^2}(\xi - \xi^{-\frac{5}{3}}) + \eta. \tag{44}$$

Die *allgemeine Integration* von (41) hat Halphen in sehr eleganter Form erledigt. Wenn dieses Problem im folgenden noch einmal aufgegriffen wird, so geschieht das nicht, um Besseres an die Stelle zu setzen. Es soll nur gezeigt werden, daß man auch ohne die Theorie der elliptischen Funktionen auskommt und daß die zur Verwendung gelangenden Methoden im engsten Zusammenhange stehen mit den letzten Untersuchungen dieses Kapitels.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden die Bedingungen (35) für die Koeffizienten f_1, f_2, f_3, welche erfüllt sein müssen, damit $y\frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y$ drei partikuläre Integrale besitzt, die Wurzeln der kubischen Gleichung $y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0$ sind; außerdem werde die weitere Bedingung $f_1' = -2r_1$ hinzugefügt und zur Abkürzung $R_1 = \int r_1 dx$ und $R_0 = \int r_0 dx$ geschrieben.

Erste Gleichung (35): $f_2' = \frac{1}{2}f_1 f_1' - 3r_0 = 2R_1\frac{dR_1}{dx} - 3r_0,$

$$f_2 = R_1^2 - 3R_0.$$

Zweite Gleichung (35): $f_3' = -2f_1 r_0 = 4R_1 r_0 = 4R_1\frac{dR_0}{dx},$

$$f_3 = \int 4R_1 dR_0.$$

Dritte Gleichung (35): $f_2 r_0 = f_3 r_1, \quad f_3 = \frac{r_0}{r_1}f_2 = \frac{r_0}{r_1}(R_1^2 - 3R_0).$

Wenn man f_3 nach R_0 differenziert, wird $\frac{df_3}{dR_0} = 4R_1$, $\frac{d^2 f_3}{dR_0^2} = 4\frac{dR_1}{dR_0} = 4\frac{r_1}{r_0}$, folglich

$$f_3\frac{d^2 f_3}{dR_0^2} = 4(R_1^2 - 3R_0),$$

$$4f_3\frac{d^2 f_3}{dR_0^2} - \left(\frac{df_3}{dR_0}\right)^2 = -48\,R_0. \tag{45}$$

Es sei ferner $f_3 = 4R_0^{\frac{3}{2}}u$. Die neue Funktion u genügt der Gleichung

$$(46) \qquad R_0^2\left\{4u\frac{d^2u}{dR_0^2} - \left(\frac{du}{dR_0}\right)^2\right\} + 9R_0u\frac{du}{dR_0} + \frac{3}{4}u^2 + 3 = 0.$$

Letztere bleibt ungeändert, wenn man die Veränderliche R_0 durch CR_0 ersetzt, wo C eine beliebige Konstante ist; ihre Ordnung läßt sich also erniedrigen. Man erreicht dieses Ziel, indem man an Stelle von u und R_0 zwei neue Variable η_1 und ξ_1 einführt,

$$(47) \qquad \eta_1 = \frac{4}{3}c_0R_0\frac{d(u^{\frac{3}{4}})}{dR_0}, \quad \xi_1 = -\frac{5}{3}c_0u^{\frac{3}{4}}, \quad c_0^8 = -\frac{3^8}{2^6\,5^8}.$$

Das Ergebnis ist, wie sogleich bewiesen werden soll,

$$(48) \qquad \eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = -\frac{3^2}{2^2\,5^2}(\xi_1 - \xi_1^{-\frac{5}{3}}) + \eta_1.$$

Aus (47) folgt nämlich durch Differentiation nach R_0

$$\frac{d\eta_1}{dR_0} = c_0u^{-\frac{1}{4}}\frac{du}{dR_0} + \frac{c_0}{4}R_0u^{-\frac{5}{4}}\left\{4u\frac{d^2u}{dR_0^2} - \left(\frac{du}{dR_0}\right)^2\right\}, \quad \frac{d\xi_1}{dR_0} = -\frac{5}{4}c_0u^{-\frac{1}{4}}\frac{du}{dR_0}.$$

Da die Division den Quotienten $\frac{d\eta_1}{d\xi_1}$ liefert, kann man den Ausdruck

$$\eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi_1} - \eta_1 = -\frac{9}{5}c_0R_0u^{-\frac{1}{4}}\frac{du}{dR_0} - \frac{1}{5}c_0R_0^2u^{-\frac{5}{4}}\left\{4u\frac{d^2u}{dR_0^2} - \left(\frac{du}{dR_0}\right)^2\right\}$$

bilden. Auf Grund von (46) ist aber

$$-\frac{9}{5}c_0R_0u^{-\frac{1}{4}}\frac{du}{dR_0} - \frac{1}{5}c_0R_0^2u^{-\frac{5}{4}}\left\{4u\frac{d^2u}{dR_0^2} - \left(\frac{du}{dR_0}\right)^2\right\} = \frac{3}{20}c_0u^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{5}c_0u^{-\frac{5}{4}},$$

deshalb wird

$$\eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi_1} - \eta_1 = \frac{3}{20}c_0u^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{5}c_0u^{-\frac{5}{4}}.$$

Auf der rechten Seite muss man noch u durch ξ_1 ersetzen,

$$\eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi_1} - \eta_1 = -\frac{3^2}{2^2\,5^2}\xi_1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}c_0^{\frac{8}{3}}\xi_1^{-\frac{5}{3}}.$$

Bestimmt man also die Konstante $c_0^8 = -\frac{3^8}{2^6\,5^8}$, so entsteht in der Tat (48).

Die beiden Gleichungen (44) und (48) für η und ξ einerseits, η_1 und ξ_1 andererseits stimmen in der äußeren Gestalt vollkommen überein, obwohl sie auf ganz verschiedene Art zustande gekommen sind; denn (44) ist lediglich eine Umformung der ursprünglichen Halphenschen Differentialgleichung, während die Integration von (48) auf Umwegen die Koeffizienten einer kubischen Gleichung liefert, deren Wurzeln partikuläre Integrale einer anderen Differentialgleichung sind. Zunächst scheinen diese Betrachtungen für das Integrationsproblem ziemlich nutzlos zu sein; aber es wird sich zeigen, daß es unabhängig von den letzten Überlegungen möglich ist, die charakteristische Funktion $s = \frac{r_0}{r_1}$ ganz allgemein in dem Falle $f_1' = -2r_1$ zu bestimmen und mit ihrer Hilfe die sämtlichen Differentialgleichungen (45), (46), (48) zu integrieren.

Aus $f_3 = s(R_1^2 - 3R_0) = 4\int R_1s\,dR_1$ ergibt sich durch Differentiation nach R_1

$$(R_1^2 - 3R_0)\frac{ds}{dR_1} = 2R_1s + 3s^2.$$

Wenn man beide Seiten mit s multipliziert, wird

$$f_3 \frac{ds}{dR_1} = 2R_1 s^2 + 3s^3.$$

Man differenziert noch einmal nach R_1:

$$f_3 \frac{d^2 s}{dR_1^2} + \frac{df_3}{dR_1}\frac{ds}{dR_1} = 2s^2 + 4R_1 s \frac{ds}{dR_1} + 9s^2 \frac{ds}{dR_1};$$

da $\frac{df_3}{dR_1} = 4R_1 s$ ist, erhält man

$$f_3 \frac{d^2 s}{dR_1^2} = 2s^2 + 9s^2 \frac{ds}{dR_1}.$$

Die Division der beiden Ausdrücke für $f_3 \frac{ds}{dR_1}$ und $f_3 \frac{d^2 s}{dR_1^2}$ liefert die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dR_1^2}(2R_1 + 3s) = \frac{ds}{dR_1}\left(2 + 9\frac{ds}{dR_1}\right). \tag{49}$$

Man setze $s = \omega - \frac{2}{3} R_1$, dann findet man ω aus

$$\omega \frac{d^2\omega}{dR_1^2} = 3\left(\frac{d\omega}{dR_1} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{d\omega}{dR_1} - \frac{4}{9}\right).$$

Man gelangt zu einer Differentialgleichung erster Ordnung für $p = \frac{d\omega}{dR_1}$, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{d^2\omega}{dR_1^2} = p\frac{dp}{d\omega}$ ist,

$$\frac{p\,dp}{\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(p - \frac{4}{9}\right)} = \frac{3\,d\omega}{\omega}.$$

Die Integration gibt $\left(p - \frac{2}{3}\right)^3 \left(p - \frac{4}{9}\right)^{-2} = c_1^3 \omega^3$ oder

$$\left(\frac{d\omega}{dR_1} - \frac{2}{3}\right)^3 = c_1^3 \omega^3 \left(\frac{d\omega}{dR_1} - \frac{4}{9}\right)^2, \quad c_1 \text{ eine Konstante.} \tag{50}$$

In den Koeffizienten von (50) kommt die unabhängige Variable R_1 nicht vor; die Integration läßt sich daher mühelos durchführen, wenn man nach ω auflöst und wieder $\frac{d\omega}{dR_1} = p$ schreibt,

$$\omega = \frac{1}{c_1}\left(p - \frac{2}{3}\right)\left(p - \frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}. \tag{51}$$

Nennt man die Funktion auf der rechten Seite zur Abkürzung $f(p)$, so ist das allgemeine Integral von (50) nach bekannten Methoden

$$R_1 = \int \frac{1}{p} f'(p)\,dp + \text{const.} = -\frac{1}{2c_1}\left\{\left(p - \frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} - 2c\right\},$$

wo c eine weitere Integrationskonstante ist. Hieraus berechnet man $\left(p - \frac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$ und $p - \frac{2}{3}$ und setzt in (51) ein; das Ergebnis ist

$$c_1\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(c - c_1 R_1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{9}(c - c_1 R_1).$$

Nun ist die Funktion $s = \frac{r_0}{r_1}$ vollständig bestimmt,

$$(52) \qquad s = -\frac{2}{9} R_1 - \frac{4c}{9c_1} + \frac{1}{2c_1}\sqrt{2}(c - c_1R_1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich weiter $R_0 = \int r_0 dx = \int s dR_1$ durch R_1 ausdrücken,

$$R_0 = c_2 - \frac{4c}{9c_1} R_1 - \frac{1}{9} R_1^2 - \frac{1}{c_1^2}\sqrt{2}(c - c_1R_1)^{+\frac{1}{2}}.$$

Die Konstante c_2 ist nicht willkürlich; ihre Berechnung erfolgt an späterer Stelle. Ferner ist

$$f_2 = R_1^2 - 3R_0 = -3c_2 + \frac{8}{3} R_1^2 + \frac{4}{3c_1} R_1(c - c_1R_1) + \frac{3}{c_1^2}\sqrt{2}(c - c_1R_1)^{+\frac{1}{2}},$$

$$f_2 = \frac{6}{c_1}(c - c_1R_1)s + \frac{8c^2}{3c_1^2} - 3c_2,$$

$$f_3 = f_2 s = \frac{6}{c_1}(c - c_1R_1)s^2 + \left(\frac{8c^2}{3c_1^2} - 3c_2\right)s.$$

Es soll jetzt bewiesen werden, daß zwischen den drei Konstanten c, c_1, c_2 die Relation $c_2 = \frac{8}{9}\frac{c^2}{c_1^2}$ besteht. Setzt man nämlich in f_3 den Ausdruck (52) für s ein, so enthält der erste Summand $\frac{6}{c_1}(c - c_1R_1)s^2$ keine Potenzen von $(c - c_1R_1)$ mit negativen Exponenten, wohl aber der zweite Teil. Andererseits kann man zeigen, daß $f_3 = \int R_1 s\, dR_1$ frei von solchen negativen Potenzen ist. Der erste Teil von s, nämlich $-\frac{2}{9} R_1 - \frac{4c}{9c_1}$, braucht nicht berücksichtigt zu werden; es kommt also nur auf das Integral

$$\int R_1(c - c_1R_1)^{-\frac{1}{2}} dR_1$$

an, das aber auch keine negativen Potenzen liefert. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn $c_2 = \frac{8}{9}\frac{c^2}{c_1^2}$ ist. Die endgültige Form der Koeffizienten der kubischen Gleichung ist jetzt festgelegt,

$$(53) \qquad f_1 = -2R_1,\ f_2 = \frac{6}{c_1}(c - c_1R_1)s,\ f_3 = \frac{6}{c_1}(c - c_1R_1)s^2,$$

und es sei noch einmal hervorgehoben, daß die drei Wurzeln partikuläre Integrale der Differentialgleichung $y\frac{dy}{dR_1} = s + y$ sind. Diese letztere ist aber nichts anderes als die transformierte Jacobische Differentialgleichung in der von Elliot angegebenen Form; wenigstens hängt sie auf das engste mit ihr zusammen. Setzt man nämlich $y = -Y$ und $\frac{c}{c_1} - R_1 = R_2$, so wird

$$Y\frac{dY}{dR_2} = s_2 + Y,$$

wo $s_2 = -\frac{2}{9} R_2 + \frac{2c}{3c_1} - \frac{1}{2}\sqrt{2}c_1^{-\frac{3}{2}} R_2^{-\frac{1}{2}}$ ist. Die charakteristische Funktion s_2 hat also genau dieselbe Struktur, wie sie durch die Formel (24) des ersten Kapitels gefordert wird; nur ist $\alpha = \frac{2c}{3c_1}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{2}c_1^{-\frac{3}{2}}$.

Im Falle $\varkappa = 2$ ist schon einmal die Funktion $s = \frac{r_0}{r_1}$ bestimmt worden; die erste der Formeln (40) heißt

$$s = -\frac{2}{9} R_1 - \frac{1}{6} \gamma_1 R_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Sie geht aus (52) dadurch hervor, daß man $c = 0$ setzt, und ihre Form erklärt sich durch die besonderen Voraussetzungen, die bei ihrer Ableitung gemacht wurden.

Es bleibt nun noch übrig, das allgemeine Integral der transformierten *Halphenschen Differentialgleichung* herzustellen. Man muß zu diesem Zwecke die Funktionen R_0, u, ξ_1 und η_1 durch die Hilfsvariable R_1 ausdrücken.

Aus $f_2 = R_1^2 - 3R_0$ folgt

$$R_0 = \frac{1}{3} R_1^2 - 2\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s. \tag{54}$$

Hierin ist s durch die Formel (52) gegeben. Ferner ist

$$u = \frac{1}{4} f_3 R_0^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s^2 R_0^{-\frac{3}{2}}.$$

Die zweite Gleichung (47) liefert

$$\xi_1^8 = \left(\frac{5}{3}\right)^8 c_0^8 u^6 = -\frac{u^6}{2^6} = -\frac{3^6}{2^{12}}\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right)^6 s^{12} R_0^{-9}.$$

Die Berechnung von η_1 ist etwas umständlicher. Zunächst ist

$$\eta_1 = c_0 R_0 u^{-\frac{1}{4}} \frac{du}{dR_0} = c_0 R_0 u^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{s} \frac{du}{dR_1}.$$

Für $\frac{du}{dR_1}$ findet man $R_0^{-\frac{3}{2}} R_1 s - 9 R_0^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s^3$, also

$$\eta_1 = c_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{c}{c_1} - R_1\right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{1}{2}} R_0^{-\frac{9}{8}} \left\{R_0 R_1 - 9\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s^2\right\}.$$

In der letzten Klammer ersetzt man R_0 durch den Ausdruck (54):

$$\eta_1 = c_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{c}{c_1} - R_1\right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{1}{2}} R_0^{-\frac{9}{8}} \left\{\frac{1}{3} R_1^3 - \left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s(9s + 2R_1)\right\}.$$

Eine verhältnismäßig einfache Gestalt nimmt der Quotient $\frac{\eta_1}{\xi_1}$ an:

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = -\frac{2}{5}\left(\frac{c}{c_1} - R_1\right)^{-1} s^{-2} \left\{\frac{1}{3} R_1^3 - \left(\frac{c}{c_1} - R_1\right) s(9s + 2R_1)\right\}.$$

Durch die Formeln für ξ_1^8, η_1, $\frac{\eta_1}{\xi_1}$ wäre die allgemeine Integration der Halphenschen Differentialgleichung durchgeführt, wenn nicht ein Bedenken entgegenstände, welches sich auf die Zahl der willkürlichen Konstanten bezieht. Es treten nämlich zwei Konstanten c und c_1 auf, obwohl die Differentialgleichung (48) nur von der ersten Ordnung ist. Es läßt sich jedoch zeigen, daß diese Schwierigkeit leicht beseitigt werden kann, wenn man an Stelle der Hilfsvariablen R_1 eine neue, nämlich v, durch die Gleichung $R_1 = \frac{1}{c_1}(c - 2v^2)$ einführt. Man gelangt zu folgenden Ergebnissen:

$$s = \frac{1}{c_1 v}\left(\frac{4}{9} v^3 - \frac{2}{3} cv + \frac{1}{2}\right),$$

$$R_0 = -\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{4}{9} v^4 - \frac{4}{3} cv^2 + 2v - \frac{1}{3} c^2\right),$$

$$(55)\qquad \begin{cases} \xi_1^8 = \dfrac{\left(v^3 - \frac{3}{2}cv + \frac{9}{8}\right)^{12}}{\left(v^4 - 3cv^2 + \frac{9}{2}v - \frac{3}{4}c^2\right)^9}, \\ \dfrac{\eta_1}{\xi_1} = -\dfrac{3^2}{2^4 5}\dfrac{3(c-2v^2)^3 + 8\left(v^3 - \frac{3}{2}cv + \frac{9}{8}\right)\left(4cv - \frac{9}{2}\right)}{\left(v^3 - \frac{3}{2}cv + \frac{9}{8}\right)^2}. \end{cases}$$

Die rationalen Funktionen für ξ_1^8 und $\frac{\eta_1}{\xi_1}$ enthalten, wie es sich gehört, nur eine einzige willkürliche Konstante. — Da nun die Gleichung (44) zwischen η und ξ genau dieselbe Form besitzt wie die Gleichung (48) zwischen η_1 und ξ_1, kann man ξ^8 und $\frac{\eta}{\xi}$ durch dieselben Funktionen darstellen wie ξ_1^8 und $\frac{\eta_1}{\xi_1}$, und wenn man schließlich

$$x = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{10\eta}{\xi}\right), \qquad t = 2^{-8}3^3\xi^{-\frac{8}{3}}$$

setzt, ist auch die ursprüngliche Halphensche Differentialgleichung (41) algebraisch integriert.

Drittes Kapitel.

Der integrierende Faktor.

1. Der Multiplikator M, welcher den Ausdruck

$$y\,dy - (r_0 + r_1 y)\,dx$$

zu einem vollständigen Differential macht, genügt der partiellen Differentialgleichung

$$(56)\qquad y\frac{\partial \log M}{\partial x} + (r_0 + r_1 y)\frac{\partial \log M}{\partial y} + r_1 = 0.$$

Man kann den Versuch für zweckmäßig halten, die Form der Funktion M vorzuschreiben und die Koeffizienten r_0 und r_1 aus (56) zu bestimmen; allerdings ist dabei zu beachten, daß die zugehörige Differentialgleichung zwischen den Variablen y und x nicht trivial wird, sondern sich durch bemerkenswerte Eigenschaften auszeichnet. Schon Abel [5]) hat sich mit dem Problem beschäftigt. Er betrachtete Multiplikatoren, deren Logarithmus ganze Funktionen von y sind mit Koeffizienten, die die Veränderliche x enthalten. Es sei auf seine Abhandlung verwiesen; in dieser Arbeit soll zunächst angenommen werden, daß nicht der Logarithmus, sondern M selbst die Gestalt

$$(57)\qquad M = (y - y_1)^{n_1}(y - y_2)^{n_2}(y - y_3)^{n_3}\cdots(y - y_k)^{n_k}$$

besitzt, wo die $y_1, y_2, \ldots$ voneinander verschiedene Funktionen von x und die Exponenten $n_1, n_2, \ldots$ Konstanten sind. Durch Einsetzen in (56) findet man

$$(58)\qquad y\left\{\frac{n_1 y_1'}{y - y_1} + \frac{n_2 y_2'}{y - y_2} + \cdots + \frac{n_k y_k'}{y - y_k}\right\} = (r_0 + r_1 y)\left\{\frac{n_1}{y - y_1} + \frac{n_2}{y - y_2} + \cdots + \frac{n_k}{y - y_k}\right\} + r_1.$$

Wenn man voraussetzt, daß (58) für jeden Wert von y gültig ist, kann man beweisen, daß die Funktionen y_m die gegebene Differentialgleichung $yy' = r_0 + r_1 y$ befriedigen. Zu diesem Zwecke mache man $y = y_m$, nachdem man (58) vorher mit $y - y_m$ multipliziert hat. Es entstehen k Relationen

$$(59)\qquad y_m y_m' = r_0 + r_1 y_m; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

[5]) N. H. Abel, Sur l'équation différentielle $(y + s)\,dy + (p + qy + ry^2)\,dx = 0$, Oeuvres complètes **2** (1881), p. 26—35.

Die Gleichung (58) läßt sich aber auch in die Form

$$\frac{n_1 y_1'}{1-\frac{y_1}{y}} + \frac{n_2 y_2'}{1-\frac{y_2}{y}} + \ldots + \frac{n_k y_k'}{1-\frac{y_k}{y}} = \left(\frac{r_0}{y} + r_1\right)\left\{\frac{n_1}{1-\frac{y_1}{y}} + \frac{n_2}{1-\frac{y_2}{y}} + \cdots + \frac{n_k}{1-\frac{y_k}{y}}\right\} + r_1$$

bringen. Für $y = \infty$ wird

$$n_1 y_1' + n_2 y_2' + \cdots + n_k y_k' = (1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k)\, r_1 .$$

Es sind daher die Funktionen y_m nicht irgendwelche partikulären Integrale, sondern es besteht zwischen ihnen noch die lineare, nichthomogene Relation

$$(60) \qquad n_1 y_1 + n_2 y_2 + \cdots + n_k y_k = (1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k) R_1 .$$

Das sind im ganzen $k+1$ Bedingungen; ebenso viele würde man finden, wenn man (58) mit dem Produkte $(y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_k)$ multiplizierte und in der so entstehenden ganzen Funktion k-ten Grades von y die Koeffizienten der einzelnen Potenzen zum Verschwinden brächte. Bei diesem Verfahren würden allerdings die Bedingungsgleichungen für die y_m eine weniger einfache Gestalt annehmen.

2. Den Fall $k = 1$, $M = (y - y_1)^n$ hat schon Abel behandelt; es genügt daher, in aller Kürze die Ergebnisse mitzuteilen. Das partikuläre Integral y_1, welches in M auftritt, wird $y_1 = +\frac{n+1}{n} R_1$. Für die charakteristische Funktion $\frac{r_0}{r_1}$ erhält man $s = \frac{n+1}{n^2} R_1$. Die Invariante L ist eine Konstante; das allgemeine Integral der Differentialgleichung heißt

$$\left(y - \frac{n+1}{n} R_1\right)^{n+1} \left(y + \frac{1}{n} R_1\right) = \text{const.}$$

Von größerem Interesse ist der Fall $k = 2$, also

$$M = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} .$$

Multipliziert man

$$y\left\{\frac{n_1 y_1'}{y - y_1} + \frac{n_2 y_2'}{y - y_2}\right\} = (r_0 + r_1 y)\left\{\frac{n_1}{y - y_1} + \frac{n_2}{y - y_2}\right\} + r_1$$

mit dem Produkte $(y - y_1)(y - y_2)$, so kann man in der quadratischen Gleichung das von y freie Glied gleich Null setzen; dann wird

$$y_1 y_2 = \frac{r_0}{r_1}(n_2 y_1 + n_1 y_2) .$$

Eliminiert man aus dieser Relation und

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 = (1 + n_1 + n_2) R_1$$

die Funktion y_2, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für y_1:

$$(61a) \quad n_1^2 y_1^2 + \left\{(n_2^2 - n_1^2)\frac{r_0}{r_1} - (1 + n_1 + n_2) R_1\right\} n_1 y_1 + n_1^2 (1 + n_1 + n_2)\frac{r_0}{r_1} R_1 = 0 .$$

Eliminiert man dagegen y_1, so heißt die quadratische Gleichung für y_2:

$$(61b) \quad n_2^2 y_2^2 + \left\{(n_1^2 - n_2^2)\frac{r_0}{r_1} - (1 + n_1 + n_2) R_1\right\} n_2 y_2 + n_2^2 (1 + n_1 + n_2)\frac{r_0}{r_1} R_1 = 0 .$$

Da y_1 und y_2, wie oben bewiesen wurde, partikuläre Integrale sind, ist es zweckmäßig, in (61a) den Quotienten $\frac{r_0}{r_1} = y_1\left(\frac{dy_1}{dR_1} - 1\right)$, in (61b) aber $\frac{r_0}{r_1} = y_2\left(\frac{dy_2}{dR_1} - 1\right)$ zu setzen. Es entstehen auf diese Weise zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich nach

einigen Umformungen folgendermaßen schreiben lassen:

$$(62)\quad \begin{aligned} &\{(n_2^2-n_1^2)\,y_1+n_1(1+n_1+n_2)R_1\}\frac{dy_1}{dR_1}+(n_1+n_1^2-n_2^2)\,y_1-(n_1+1)(1+n_1+n_2)R_1=0,\\ &\{(n_1^2-n_2^2)\,y_2+n_2(1+n_1+n_2)R_1\}\frac{dy_2}{dR_1}+(n_2+n_2^2-n_1^2)\,y_2-(n_2+1)(1+n_1+n_2)R_1=0. \end{aligned}$$

Wenn man zwei neue Funktionen ψ_1 und ψ_2 durch die Substitutionen

$$(62a)\quad \begin{cases} y_1=\dfrac{n_2}{n_2-n_1}\psi_1-\dfrac{n_1(1+n_1+n_2)}{n_2^2-n_1^2}R_1,\\ y_2=\dfrac{n_1}{n_1-n_2}\psi_2-\dfrac{n_2(1+n_1+n_2)}{n_1^2-n_2^2}R_1 \end{cases}$$

definiert, erkennt man leicht, daß beide derselben Differentialgleichung

$$(63)\quad \psi\frac{d\psi}{dR_1}=\frac{1+n_1+n_2}{(n_1+n_2)^2}R_1+\psi$$

genügen. Es soll bewiesen werden, daß $\psi_1=\psi_2$ ist. Aus (62a) erhält man

$$n_1y_1+n_2y_2=\frac{n_1n_2}{n_2-n_1}(\psi_1-\psi_2)+(1+n_1+n_2)R_1;$$

andererseits war

$$n_1y_1+n_2y_2=(1+n_1+n_2)R_1;$$

folglich stimmen die beiden Funktionen überein. Es versteht sich übrigens von selbst, daß die Formeln (62a) und (63) nur dann einen Sinn haben, wenn sowohl n_1+n_2 als auch n_1-n_2 von Null verschieden sind.

Angenommen, man hätte die Funktion ψ aus (63) gefunden, so wären die partikulären Integrale y_1 und y_2 und damit auch der integrierende Faktor M bekannt, und es bliebe nur noch übrig, den Quotienten $s=\frac{r_0}{r_1}$ zu ermitteln, der für die Form der Differentialgleichung charakteristisch ist. Unter den Relationen, die zur Verfügung stehen, zeichnet sich die schon oben benutzte

$$y_1y_2=\frac{r_0}{r_1}(n_2y_1+n_1y_2)$$

durch eine gewisse Symmetrie aus; sie gibt

$$(64)\quad \frac{r_0}{r_1}=-\frac{R_1}{(n_2-n_1)^2(n_2+n_1)}\cdot\frac{R_1}{\psi}\left\{n_2\frac{\psi}{R_1}-\frac{n_1(1+n_1+n_2)}{n_2+n_1}\right\}\cdot\left\{n_1\frac{\psi}{R_1}-\frac{n_2(1+n_1+n_2)}{n_2+n_1}\right\}.$$

Da die Gleichung (63) homogen ist, bietet die Integration keine Schwierigkeiten. Von einigen Ausnahmefällen abgesehen, wird

$$(65a)\quad \left(\psi+\frac{R_1}{n_1+n_2}\right)\left(\psi-\frac{1+n_1+n_2}{n_1+n_2}R_1\right)^{1+n_1+n_2}=\text{const.}$$

Die Formel versagt, wenn $n_1+n_2+2=0$ ist; man hat dann

$$(65b)\quad e^{\frac{R_1}{2\psi-R_1}}=C(2\psi-R_1).$$

Die Auflösung der Gleichung (65a) nach ψ kann durch konvergente Reihen erfolgen; ist n_1+n_2 gleich einer rationalen Zahl, so handelt es sich um algebraische Funktionen von R_1.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $n_1=n_2=n$. Die beiden quadratischen Gleichungen (61a) und (61b) stimmen überein, und die partikulären Integrale y_1 und y_2

sind Wurzeln *derselben* Gleichung

$$y^2 - \frac{2n+1}{n} R_1 y + (2n+1) \frac{r_0}{r_1} R_1 = 0 , \tag{61c}$$

deren Diskriminante

$$D = -4(2n+1) R_1 \left(\frac{r_0}{r_1} - \frac{2n+1}{4n^2} R_1 \right)$$

ist. Schreibt man (61c) in der Form $y^2 + 2fy + g = 0$, setzt also $g = (2n+1) \frac{r_0}{r_1} R_1$, so kann man die Relationen (31) des zweiten Kapitels anwenden. Man erhält

$$\frac{d \log D}{dx} = -\frac{2r_0}{g} = -\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{r_1}{R_1} = -\frac{2}{2n+1} \frac{d \log R_1}{dx} ,$$

woraus sich durch Integration

$$D = \gamma_1 R_1^{-\frac{2}{2n+1}} ,$$

γ_1 eine Konstante, ergibt. Für die Diskriminante hat man nun zwei Ausdrücke, die man gleichsetzen darf. Man findet eine Darstellung der charakteristischen Funktion $s = \frac{r_0}{r_1}$,

$$s = \frac{2n+1}{4n^2} R_1 - \gamma R_1^{-\frac{2n+3}{2n+1}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{4(2n+1)} . \tag{66}$$

Nunmehr lassen sich auch die Funktionen y_1, y_2 und der integrierende Faktor M berechnen. Die Ausdrücke

$$y_1 + y_2 = \frac{2n+1}{n} R_1, \quad y_1 y_2 = \frac{(2n+1)^2}{4n^2} R_1^2 - \gamma(2n+1) R_1^{-\frac{2}{2n+1}}$$

muß man in $[(y - y_1)(y - y_2)]^n = [y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2]^n$ einsetzen, so daß schließlich M die Gestalt

$$M = \left\{ \left(y - \frac{2n+1}{2n} \right)^2 - \gamma (2n+1) R_1^{-\frac{2}{2n+1}} \right\}^n \tag{67}$$

annimmt. Es sei $\nu = -\frac{2n+3}{2n+1}$, dann wird

$$s = -\frac{2(\nu+1)}{(\nu+3)^2} R_1 - \gamma R_1^{\nu} . \tag{66a}$$

Eine ganz ähnliche Funktion trat schon in der Differentialgleichung (32) auf, deren partikuläre Integrale y_1 und y_2 Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung waren. Diese Funktion s ist durch den Faktor von R_1 und den Exponenten von R_1^{ν} charakterisiert; es ist nicht möglich, an beiden etwas zu ändern, wenn man auf die Variablen y und R_1 lineare Transformationen anwendet, bei welchen die Form der Differentialgleichung erhalten bleibt.

Da der integrierende Faktor M bekannt ist, läßt sich jetzt das allgemeine Integral

$$\Phi(y, R_1) = \text{const.}$$

angeben. Es wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = My, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = -M(s+y) .$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so findet man für Φ in bezug auf y eine ganze rationale Funktion vom Grade $2n+2$, deren Koeffizienten algebraische Funktionen von R_1 sind.

Im einfachsten Falle $n = 1$ erhält man $s = \frac{3}{4} R_1 - \gamma R_1^{-\frac{5}{3}}$,

$$4\Phi = y^4 - 4R_1 y^3 + \left(\frac{9}{2} R_1^2 - 6\gamma R_1^{-\frac{2}{3}}\right) y^2 - \left(\frac{27}{16} R_1^4 - \frac{27}{2} \gamma R_1^{\frac{4}{3}} - 9\gamma^2 R_1^{-\frac{4}{3}}\right) = \text{const.}$$

Ist n keine ganze Zahl, so ist es in der Regel unmöglich, für die Funktion Φ einen einfachen Ausdruck in geschlossener Form aufzustellen. —

Für den besonderen Fall $n_1 + n_2 = 0$ hat schon Abel den integrierenden Faktor ermittelt. Die von ihm mitgeteilten Resultate ergeben sich leicht aus den Formeln (62). Die Differentialgleichungen für y_1 und y_2 heißen

$$n_1 R_1 \frac{dy_1}{dR_1} + n_1 y_1 - (n_1 + 1) R_1 = 0, \quad n_2 R_1 \frac{dy_2}{dR_1} + n_2 y_2 - (n_2 + 1) R_1 = 0,$$

und ihre Integrale sind

$$y_1 = \frac{n_1 + 1}{2n_1} R_1 + \frac{c_1}{R_1}, \quad y_2 = \frac{n_2 + 1}{2n_2} R_1 + \frac{c_2}{R_1}.$$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 sind nicht voneinander unabhängig; denn einerseits ist

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 = R_1 + \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2}{R_1},$$

andererseits wird auf Grund der Formel (60)

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 = R_1;$$

daraus folgt $n_1 c_1 + n_2 c_2 = 0$, und da $n_2 = -n_1$ war, ist $c_1 = c_2$. Aus der schon wiederholt benutzten Relation

$$y_1 y_2 = \frac{r_0}{r_1} (n_2 y_1 + n_1 y_2)$$

erhält man die charakteristische Funktion

$$s = R_1 \left(\frac{1 + n_1}{2n_1} + \frac{c}{R_1^2}\right)\left(\frac{1 - n_1}{2n_1} - \frac{c}{R_1^2}\right).$$

Hierin ist c der gemeinsame Wert der beiden Konstanten c_1 und c_2. Schließlich findet man den Multiplikator

$$M = \left(\frac{y - y_1}{y - y_2}\right)^{n_1} = \left\{\frac{y - R_1\left(\frac{n_1 + 1}{2n_1} + \frac{c}{R_1^2}\right)}{y - R_1\left(\frac{n_1 - 1}{2n_1} + \frac{c}{R_1^2}\right)}\right\}^{n_1}.$$

3. Wenn man die Differentialgleichungen von der Form $yy' = r_0 + r_1 y$ studieren will, die zu dem Multiplikator

$$M = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} (y - y_3)^{n_3}$$

gehören, muß man sich erinnern, daß y_1, y_2, y_3 partikuläre Integrale sind, zwischen denen die lineare Relation

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = (1 + n_1 + n_2 + n_3) R_1$$

besteht. Im allgemeinen scheint die Bestimmung dieser Funktionen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden zu sein; aus diesem Grunde beschränken sich die folgenden Untersuchungen auf den einfacheren Fall $n_1 = n_2 = n_3 = n$, der zu der Relation

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{3n + 1}{n} R_1$$

führt. Es ist zweckmäßig, dem integrierenden Faktor die Form

$$M = (y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3)^n$$

zu geben; hierin ist $f_1 = -\frac{1}{n}(3n + 1) R_1$, die Koeffizienten f_2 und f_3 sind noch zu berechnen.

An einer früheren Stelle dieser Abhandlung wurde die Frage aufgeworfen, welchen Bedingungen die Koeffizienten f_1, f_2, f_3, sowie r_0 und r_1 unterworfen werden müssen, damit die Differentialgleichung drei partikuläre Integrale besitzt, welche Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3 = 0$$

sind. Die Antwort gaben die Relationen (35). Es wurde dann weiter die zunächst ganz willkürliche Voraussetzung hinzugefügt, daß $f_1 = -\varkappa R_1$ ist. Mit Rücksicht auf die Struktur des integrierenden Faktors zeigt es sich nun, daß diese Annahme einen bestimmten Sinn hat. Zwischen dem Exponenten n und dem Koeffizienten $\varkappa$ besteht die Gleichung $\varkappa = \frac{1}{n}(3n+1)$ oder

$$n = \frac{1}{\varkappa - 3}.$$

Die Berechnung der Koeffizienten f_2 und f_3 hing von der Integration der Differentialgleichung (38) ab. Es wurden vier partikuläre Integrale gefunden, die zu den Parameterwerten

$$\varkappa_1 = +2, \quad \varkappa_2 = -3, \quad \varkappa_3 = +\frac{9}{5}, \quad \varkappa_4 = +\frac{12}{5}$$

gehören, und damit war die Möglichkeit gegeben, die noch unbekannten Funktionen f_2 und f_3 zu bestimmen. Die folgende tabellarische Übersicht enthält alles, was in den vier Fällen zur Herstellung des integrierenden Faktors nötig ist:

$\varkappa = +2, \quad n = -1,$

$$s = -\frac{2}{9} R_1 - \gamma R_1^{-\frac{1}{2}},$$
$$f_1 = -2R_1,$$
$$f_2 = +\frac{4}{3} R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}},$$
$$f_3 = -\frac{8}{27} R_1^3 - \frac{8}{3} \gamma R_1^{\frac{3}{2}} - 6\gamma^2.$$

$\varkappa = -3, \quad n = -\frac{1}{6},$

$$s = +20 R_1 - \gamma R_1^{-\frac{1}{2}},$$
$$f_1 = +3R_1,$$
$$f_2 = -24 R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}},$$
$$f_3 = -80 R_1^3 + 24\gamma R_1^{\frac{3}{2}} - \gamma^2.$$

$\varkappa = +\frac{9}{5}, \quad n = -\frac{5}{6},$

$$s = -\frac{4}{25} R_1 - \gamma R_1^{-\frac{1}{2}},$$
$$f_1 = -\frac{9}{5} R_1,$$
$$f_2 = +\frac{24}{25} R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}},$$
$$f_3 = -\frac{16}{125} R_1^3 - \frac{8}{5} \gamma R_1^{\frac{3}{2}} - 5\gamma^2.$$

$\varkappa = +\frac{12}{5}, \quad n = -\frac{5}{3},$

$$s = -\frac{4}{25} R_1 - \gamma R_1^{-\frac{1}{2}},$$
$$f_1 = -\frac{12}{5} R_1,$$
$$f_2 = +\frac{48}{25} R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}},$$
$$f_3 = -\frac{64}{125} R_1^3 - \frac{24}{5} \gamma R_1^{\frac{3}{2}} - 10\gamma^2.$$

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß die Differentialgleichung $y\frac{dy}{dR_1} = s + y$, in der $s = -\frac{4}{25}R_1 - \gamma R_1^{-\frac{1}{2}}$ ist, zwei verschiedene integrierende Faktoren

$$M_1 = \left\{y^3 - \frac{9}{5}R_1y^2 + \left(\frac{24}{25}R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}}\right)y - \frac{16}{125}R_1^3 - \frac{8}{5}\gamma R_1^{\frac{3}{2}} - 5\gamma^2\right\}^{-\frac{5}{6}},$$

$$M_2 = \left\{y^3 - \frac{12}{5}R_1y^2 + \left(\frac{48}{25}R_1^2 + 6\gamma R_1^{\frac{1}{2}}\right)y - \frac{64}{125}R_1^3 - \frac{24}{5}\gamma R_1^{\frac{3}{2}} - 10\gamma^2\right\}^{-\frac{5}{3}}$$

besitzt. Nach einem bekannten Satze ist dann

$$\frac{M_1}{M_2} = \text{const.}$$

das allgemeine Integral; potenziert man es mit dem Exponenten $\frac{6}{5}$, so erhält man eine algebraische Gleichung, die in bezug auf y vom sechsten Grade ist.

4. Der Multiplikator soll schließlich in der Form

$$M = y^n + f_1y^{n-1} + f_2y^{n-2} + \cdots + f_{n-1}y + f_n$$

vorausgesetzt werden. Die Koeffizienten $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seien Funktionen von R_1; zusammen mit $s = \frac{r_0}{r_1}$ befriedigen sie $n + 1$ Gleichungen, die man erhält, wenn man den Ausdruck für M in die partielle Differentialgleichung

$$y\frac{\partial M}{\partial R_1} + (s + y)\frac{\partial M}{\partial y} + M = 0$$

einführt, die Faktoren gleich hoher Potenzen von y sammelt und ihre Summe zum Verschwinden bringt. Die Ergebnisse sind

$$(68)\quad \begin{cases} \frac{df_1}{dR_1} + (n+1) = 0, \\ \frac{df_2}{dR_1} + n(s+f_1) = 0, \\ \frac{df_3}{dR_1} + (n-1)(sf_1+f_2) = 0, \\ \frac{df_4}{dR_1} + (n-2)(sf_2+f_3) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dR_1} + 2(sf_{n-2}+f_{n-1}) = 0, \\ sf_{n-1} + f_n = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $\Phi(R_1, y) = \text{const.}$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung, so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = My, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R_1} = -M(s+y).$$

Aus der ersten der beiden Relationen folgt

$$\Phi = \frac{y^{n+2}}{n+2} + \frac{f_1y^{n+1}}{n+1} + \frac{f_2y^n}{n} + \cdots + \frac{f_{n-1}y^3}{3} + \frac{f_ny^2}{2} + \Psi,$$

wo Ψ eine noch zu bestimmende Funktion von R_1 ist. Durch Differentiation nach R_1

findet man einerseits

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = \frac{df_1}{dR_1}\frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{df_2}{dR_1}\frac{y^n}{n} + \cdots + \frac{df_{n-1}}{dR_1}\frac{y^3}{3} + \frac{df_n}{dR_1}\frac{y^2}{2} + \frac{d\Psi}{dR_1};$$

andererseits ist $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = -M(s+y)$, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = -\{y^{n+1} + (s+f_1)y^n + \cdots + (sf_{n-2} + f_{n-1})y^2 + (sf_{n-1} + f_n)y + sf_n\}.$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke liefert zunächst eine Bestätigung der Relationen (68), alsdann aber auch die Funktion

$$\Psi = -\int sf_n\, dR_1.$$

Das allgemeine Integral läßt sich daher wie folgt schreiben:

$$(69)\quad (n+2)\Phi = y^{n+2} + \frac{n+2}{n+1}f_1 y^{n+1} + \frac{n+2}{n}f_2 y^n + \cdots + \frac{n+2}{2}f_n y^2 - (n+2)\int sf_n\, dR_1 = \text{const.}$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich der Satz:

Wenn es möglich ist, Ψ und die Koeffizienten f_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, als algebraische Funktionen von R_1 zu bestimmen, so ist damit auch die zugehörige Differentialgleichung $y\frac{dy}{dR_1} = s + y$ algebraisch integriert.

Die Relationen (68) stimmen übrigens mit den Gleichungen (30) des zweiten Kapitels überein, wenn man in letztere an Stelle von x die unabhängige Veränderliche R_1 einführt und die Bedingung $f_1 = -(n+1)R_1$ hinzufügt. Das ist selbstverständlich; denn die n Wurzeln der Gleichung

$$M = y^n + f_1 y^{n-1} + f_2 y^{n-2} + \cdots + f_{n-1}y + f_n = 0$$

sind, wie oben bewiesen wurde, partikuläre Integrale (vgl. die Formeln (59)), und die Relationen (30) wurden unter dieser Voraussetzung abgeleitet.

Wenn der Multiplikator eine ganze Funktion zweiten Grades von y ist, wurde das allgemeine Integral bereits angegeben; es ist in bezug auf y vom vierten Grade, und seine Koeffizienten sind rationale Funktionen von $R_1^{\frac{1}{3}}$. Die zugehörige Differentialgleichung mit der charakteristischen Funktion

$$s = \frac{3}{4}R_1 - \gamma R_1^{-\frac{5}{3}}$$

ist daher algebraisch integrierbar. Interessanter ist der Fall

$$M = y^3 + f_1 y^2 + f_2 y + f_3.$$

Es ist $f_1 = -4R_1$; für die Koeffizienten f_2, f_3 und s ergeben sich aus (68) die Formeln

$$s = 4R_1 - \frac{1}{3}\frac{df_2}{dR_1} = -\frac{f_3}{f_2}, \qquad 8R_1 s - 2f_2 - \frac{df_3}{dR_1} = 0.$$

Das sind im wesentlichen die Formeln (35) unter Hinzunahme der Bedingung $f_1 = -4R_1$. Man kann nun ähnliche Transformationen anwenden wie im zweiten Kapitel bei der Ableitung der Differentialgleichung (38). Zunächst erhält man für f_2 die Gleichung

$$f_2\frac{d^2 f_2}{dR_1^2} + \left(\frac{df_2}{dR_1}\right)^2 - 4R_1\frac{df_2}{dR_1} - 6f_2 - 96\,R_1^2 = 0.$$

Die Funktion $\psi = f_2 R_1^{-2}$ bestimmt man aus

$$R_1^2\left\{\psi\frac{d^2\psi}{dR_1^2}+\left(\frac{d\psi}{dR_1}\right)^2\right\}+8R_1\psi\frac{d\psi}{dR_1}-4R_1\frac{d\psi}{dR_1}+2(\psi+3)(3\psi-16)=0$$

und die Funktion $\varphi = R_1\psi\frac{d\psi}{dR_1}$ aus

$$\varphi\frac{d\varphi}{d\psi}=\bar{r}_0+\bar{r}_1\varphi, \tag{70}$$

wo $\bar{r}_0 = -2\psi(\psi+3)(3\psi-16)$, $\bar{r}_1 = -(7\psi-4)$ ist. Das allgemeine Integral von (70) ist nicht bekannt. Ein partikuläres Integral von der Form $\varphi = c_0\psi^2 + c_1\psi + c_2$ existiert nicht; dagegen lassen sich zwei Koeffizienten f^* und g^* so bestimmen, daß die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varphi^2 + 2f^*\varphi + g^* = 0 \tag{71}$$

partikuläre Integrale von (70) sind. Im zweiten Kapitel sind die Methoden entwickelt worden, mit deren Hilfe man diese Untersuchungen durchführen kann. Hier sei nur das Ergebnis mitgeteilt. Es ist zunächst

$$f^* = 2(\psi-2)(\psi+3), \quad g^* = 4(\psi+3)^2\left(\psi^2-\frac{16}{3}\psi\right).$$

Ein zweites Lösungssystem für diese Koeffizienten wird weiter unten angegeben werden.

Es sei D^* die Diskriminante der quadratischen Gleichung (71), dann ermittelt man die Funktion ψ von R_1 aus

$$\frac{\psi\,d\psi}{-f^*+\frac{1}{2}\sqrt{D^*}}=\frac{dR_1}{R_1}. \tag{72}$$

Es ist zweckmäßig, eine neue Variable Ω durch die Gleichung

$$\psi = \Omega^2 - 3$$

zu definieren. Durch Integration erhält man aus

$$\frac{(\Omega-\sqrt{3})\,d\Omega}{\Omega\left(\Omega-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)}=-\frac{dR_1}{R_1}$$

eine Gleichung fünften Grades für Ω, nämlich

$$\Omega^3\left(\Omega-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2=\frac{c^5}{R_1^5},\quad c \text{ eine willkürliche Konstante.}$$

Hat man Ω als Funktion von R_1 gefunden, so wird $f_2 = R_1^2\psi$,

$$f_2 = R_1^2(\Omega^2-3),$$

ferner

$$s = 4R_1 - \frac{1}{3}\frac{df_2}{dR_1},$$

$$s = 6R_1\left\{1-\frac{2}{27}\sqrt{3}\,\frac{\Omega^2}{\Omega-\sqrt{3}}\right\},$$

endlich $f_3 = -f_2 s$, also

$$f_3=\frac{4}{9}\sqrt{3}\,R_1^3\,(\Omega+\sqrt{3})(\Omega-3\sqrt{3})\left(\Omega-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

Es sind daher nicht nur die drei in dem integrierenden Faktor auftretenden Koeffizienten f_1, f_2, f_3, sondern auch der Koeffizient s in der gegebenen Differentialgleichung algebraische Funktionen der Veränderlichen R_1. Berechnet man die Diskriminante der kubischen Gleichung $M = 0$, so erkennt man, daß sie nicht identisch verschwindet; die

drei Linearfaktoren, in die man den Multiplikator zerlegen kann, sind daher voneinander verschieden, und die gegebene Differentialgleichung besitzt drei bekannte partikuläre Integrale.

Das allgemeine Integral $\Phi = \text{const.}$ ergibt sich aus (69); es ist in bezug auf y vom fünften Grade:

$$y^5 + \frac{5}{4} f_1 y^4 + \frac{5}{3} f_2 y^3 + \frac{5}{2} f_3 y^2 + 5\Psi = \text{const.},$$

wo $\Psi = -\int s f_3 dR_1$ zu setzen ist. Die Koeffizienten sind algebraische Funktionen von R_1, mit Ausnahme des letzten, der als das Integral einer algebraischen Funktion erscheint.

Das zweite Lösungssystem ist

$$f^* = 2\left(\psi + \frac{4}{3}\right)\left(\psi - \frac{16}{3}\right), \quad g^* = 4\psi(\psi + 3)\left(\psi - \frac{16}{3}\right)^2.$$

Man kann beweisen, daß die beiden genannten Wertepaare für die Faktoren f^* und g^* die einzig möglichen sind, wenn man voraussetzt, daß die Wurzeln der quadratischen Gleichung (71) der Differentialgleichung (70) genügen. — Es sei wiederum eine neue Variable Ω durch die Relation

$$\psi = \frac{16}{3} - \Omega^2$$

definiert; dann folgt aus (72)

$$\frac{\left(\Omega - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) d\Omega}{\Omega\left(\Omega - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right)} = -\frac{dR_1}{R_1}$$

und durch Integration

$$\Omega^4\left(\Omega - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{c^5}{R_1^5}, \quad c \text{ eine willkürliche Konstante.}$$

Aus dieser Gleichung fünften Grades muß man Ω als Funktion von R_1 bestimmen; ist dies geschehen, so wird

$$f_2 = -R_1^2\left(\Omega^2 - \frac{16}{3}\right),$$

$$f_3 = \frac{2}{9}\sqrt{3} R_1^3\left(\Omega + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2\left(\Omega - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right),$$

$$s = \frac{4}{9} R_1\left\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\Omega^2}{\Omega - \frac{4}{3}\sqrt{3}}\right\}.$$

Die Diskriminante der kubischen Gleichung $M = 0$ verschwindet identisch; der Multiplikator besitzt daher zwei übereinstimmende Linearfaktoren, und man kann ihn in die Form

$$M = \left\{y - \frac{4}{3} R_1\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\Omega\right)\right\}\left\{y - \frac{4}{3} R_1\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\Omega\right)\right\}^2$$

bringen. Es gibt zwei partikuläre Integrale

$$y_1 = \frac{4}{3} R_1\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\Omega\right), \quad y_2 = \frac{4}{3} R_1\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\Omega\right).$$

Das allgemeine Integral hat wieder die Gestalt

$$y^5 + \frac{5}{4} f_1 y^4 + \frac{5}{3} f_2 y^3 + \frac{5}{2} f_3 y^2 + 5\Psi = \text{const.},$$

und Ψ ist das Integral einer algebraischen Funktion.

Für die Beurteilung der Natur des allgemeinen Integrals $\Phi = \text{const.}$ ist es notwendig, in den beiden zuletzt behandelten Fällen die Beschaffenheit der Funktion Ψ einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Da sie als Integral einer algebraischen Funktion erscheint, muß man zunächst mit der Möglichkeit rechnen, daß sie Perioden und logarithmische Singularitäten besitzt. Es wird sich jedoch zeigen, daß dies nicht zutrifft, daß vielmehr Ψ eine rationale Funktion von R_1 und Ω oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine algebraische Funktion von R_1 ist.

Wenn man für f_3 und s die angegebenen Ausdrücke einsetzt, wird im ersten Falle

$$\Psi_1 = -\frac{16}{27}\,c^5 \int \frac{(\Omega+\sqrt{3})\,(\Omega-3\sqrt{3})^2\left(\Omega-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 d\Omega}{\Omega^4\left(\Omega-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^3} + \text{const.},$$

dagegen im zweiten

$$\Psi_2 = +\frac{4}{27}\,c^5 \int \frac{\left(\Omega+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^3\left(\Omega-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 d\Omega}{\Omega^5\left(\Omega-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2} + \text{const.}$$

Es ist zweckmäßig, eine neue Veränderliche ω durch die Gleichung

$$\Omega = \frac{5}{3}\sqrt{3}\,\frac{1}{1+\omega}$$

zu definieren; dann ist

$$\Psi_1 = -\frac{2^2\,c^5}{3^3\,5^6}\sqrt{3}\left(3^8\,\omega^3 + 3^8\,5\,\omega^2 + 3^5\cdot 5\cdot 29\cdot\omega + 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\frac{1}{\omega} - \frac{2^6}{\omega^2}\right) + \text{const.},$$

$$\Psi_2 = -\frac{2^2\,c^5}{3^3\,5^6}\sqrt{3}\left(2^6\,\omega^4 + 2^6\,5\,\omega^3 - 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot\omega^2 - 2^2\cdot 3^5\cdot 5\cdot\omega - \frac{3^8}{\omega}\right) + \text{const.}$$

Man sieht, daß logarithmische Glieder nicht auftreten. Ersetzt man wieder ω durch $\frac{5}{3}\sqrt{3}\,\frac{1}{\Omega} - 1$ und berücksichtigt die beiden Gleichungen fünften Grades zwischen Ω und R_1, so ergeben sich die endgültigen Ausdrücke für Ψ_1 und Ψ_2,

$$\Psi_1 = +\frac{16}{27}\,R_1^5\left(\Omega^4 - \frac{29}{6}\sqrt{3}\,\Omega^3 + \frac{81}{4}\,\Omega^2 - \frac{729}{20}\right) + \text{const.},$$

$$\Psi_2 = -\frac{4}{27}\,R_1^5\left(\Omega^4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\Omega^3 + \frac{8}{3}\,\Omega^2 - \frac{64}{45}\right) + \text{const.}$$

Damit ist aber auch der Nachweis geliefert, daß die beiden gegebenen Differentialgleichungen, welche zu den charakteristischen Funktionen

$$s_1 = 6\,R_1\left(1 - \frac{2}{27}\sqrt{3}\,\frac{\Omega^2}{\Omega-\sqrt{3}}\right),$$

$$s_2 = \frac{4}{9}\,R_1\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\Omega^2}{\Omega-\frac{4}{3}\sqrt{3}}\right)$$

gehören, algebraisch integrierbar sind.

Viertes Kapitel.

Zusammenhang mit einer Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. Die Substitution $y = t\frac{dx}{dt}$ verwandelt die Gleichung $y\frac{dy}{dx} = r_0 + r_1 y$ in

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + (1-r_1)\,t\frac{dx}{dt} - r_0 = 0\,, \tag{73}$$

und ebenso ergibt sich aus $y\frac{dy}{dR_1} = s + y$ mittels der Substitution $y = t\frac{dR_1}{dt}$ die Differentialgleichung

$$t^2\frac{d^2R_1}{dt^2} = s\,. \tag{74}$$

Im allgemeinen vereinfachen diese Transformationen das Integrationsproblem nicht; es gibt jedoch besondere Fälle, in denen die Differentialgleichung zweiter Ordnung der analytischen Untersuchung leichter zugänglich ist als die ursprüngliche. Zunächst soll die charakteristische Funktion in der Form

$$s = \varkappa R_1 - \gamma R_1^{\nu} \tag{75}$$

vorausgesetzt werden, wo $\varkappa$, γ und ν Konstanten sind. Es sei nun

$$\tau = t^{-\varepsilon}, \quad R_1 = \beta\tau^{-\alpha}u,$$

dann wird aus (74)

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon + 1 - 2\varepsilon\alpha)\frac{1}{\tau}\frac{du}{d\tau} + \frac{1}{\varepsilon^2}\{\varepsilon^2\alpha(\alpha+1) - \varepsilon(\varepsilon+1)\alpha - \varkappa\}\frac{u}{\tau^2} + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}\beta^{\nu-1}\tau^{-(\nu-1)\alpha-2}u^{\nu} = 0\,.$$

Über die Konstanten ε und α verfügt man so, daß die Faktoren von $\frac{du}{d\tau}$ und u verschwinden. Wenn $4\varkappa + 1$ von Null verschieden ist, erhält man

$$\varepsilon = \pm\sqrt{4\varkappa + 1}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon}.$$

Die Funktion u von τ bestimmt man aus der Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = C\frac{u^{\nu}}{\tau^{\mu}}\,. \tag{76}$$

Hierin haben die Konstanten C und μ folgende Werte:

$$C = -\frac{\beta^{\nu-1}\gamma}{4\varkappa+1}, \quad \mu = \alpha(\nu-1) + 2\,.$$

Da für ε beide Vorzeichen gelten, findet man zwei verschiedene Werte sowohl für α als auch für μ. Bezeichnet man diese mit α_1 und α_2 bzw. μ_1 und μ_2, so bestehen zwischen ihnen die Relationen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = \nu + 3\,.$$

Jedenfalls existieren im allgemeinen zwei zusammengehörige Differentialgleichungen vom Typus (76), die sich nur durch den Exponenten μ im Nenner der rechten Seite unterscheiden, und beide gehen aus derselben Differentialgleichung (74) durch Transformationen hervor, die denselben Charakter haben und in denen nur die Exponenten ε und α verschieden sind. Übrigens gibt es eine sehr einfache Substitution, welche unmittelbar

$$\frac{d^2u_1}{d\tau_1^2} = C\frac{u_1^{\nu}}{\tau_1^{\mu_1}} \quad \text{in} \quad \frac{d^2u_2}{d\tau_2^2} = C\frac{u_2^{\nu}}{\tau_2^{\mu_2}}$$

überführt; es ist dies

$$u_1 = \tau_1 u_2, \quad \tau_1 = \frac{1}{\tau_2}\,.$$

Hat man also die eine der beiden Differentialgleichungen integriert, so gilt dasselbe auch von der anderen.

Diese Integration läßt sich aber ohne weiteres ausführen, wenn z. B. der Exponent $\mu_1 = 0$ ist. Hierzu gehören

$$\alpha_1 = \frac{2}{1-\nu}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \qquad \varkappa = -\frac{2(\nu+1)}{(\nu+3)^2}.$$

Von Wichtigkeit ist das Ergebnis für den Koeffizienten $\varkappa$. Setzt man ihn nämlich in s ein, so wird

$$s = -\frac{2(\nu+1)}{(\nu+3)^2} R_1 - \gamma R_1^{\nu}.$$

Das ist aber gerade diejenige Form der charakteristischen Funktion, die es möglich machte, einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung aufzustellen. Es zeigt sich also, daß gewisse Ergebnisse des vorigen Kapitels in engem Zusammenhange stehen mit Problemen, die hier untersucht werden. Die Integration von (76) liefert nun die Gleichung

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{\nu+1} - c^{\nu+1}}} = \sqrt{\frac{2C}{\nu+1}}\,(\tau - \tau_0); \tag{77}$$

hierin sind c und τ_0 willkürliche Konstanten; auch über C kann man verfügen, da diese Größe den unbestimmten Faktor β enthält. Für $\nu = 2$ oder 3 ist das Integral (77) ein elliptisches, für positive ganzzahlige Werte von $\nu > 3$ ein hyperelliptisches; doch liegt kein Grund vor, den Exponenten auf diese Werte zu beschränken. Bezeichnet man mit $u = f(\tau)$ die Umkehrungsfunktion, so wird, wenn man noch $\tau = t^{\frac{\nu-1}{\nu+3}}$ setzt,

$$R_1 = \beta t^{\frac{2}{\nu+3}} f(\tau)$$

das allgemeine Integral von (74). Die Integration der ursprünglichen Differentialgleichung $y \frac{dy}{dR_1} = s + y$ erfolgt dann in der Weise, daß man sowohl $y = t\frac{dR_1}{dt}$ als auch R_1 durch die Hilfsvariable t ausdrückt. Diese Funktionen, welche im allgemeinen nicht eindeutig sind, sollen im folgenden einer genaueren Betrachtung unterzogen werden.

2. Zunächst kommt es darauf an, die *Umkehrungsfunktion* des Integrals (77) zu studieren; es sind also sämtliche Reihenentwicklungen aufzustellen, die für $u = f(\tau)$ möglich sind, wobei die besonderen Fälle $\nu = -3$, $\nu = -1$, $\nu = +1$ aus naheliegenden Gründen von der Untersuchung ausgeschlossen werden; im übrigen seien auch Werte von ν zugelassen, welche negativ sind oder als Brüche erscheinen.

In diesem Zusammenhange ist es angebracht, auf eine Transformation hinzuweisen, welche die Aufgabe vereinfacht. Setzt man nämlich

$$u = c\left(\frac{c_1}{u_1}\right)^{\frac{2}{\nu-1}}, \tag{78}$$

wo c_1 eine von Null verschiedene Konstante ist, so wird

$$\frac{du}{\sqrt{u^{\nu+1} - c^{\nu+1}}} = \frac{2i}{\nu-1} c^{\frac{1-\nu}{2}} c_1^{\frac{2}{\nu-1}} \frac{du_1}{\sqrt{u_1^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} - c_1^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}}}}, \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{79}$$

Ist nun $\nu + 1$ negativ, so ist in dem Differential auf der rechten Seite der Exponent $\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}$ positiv. Man bestimmt daher die Funktion u_1 von τ und berechnet u, indem man u_1 mit dem positiven Exponenten $\frac{2}{1-\nu}$ potenziert. Jedenfalls geht daraus

hervor, daß man die Allgemeinheit der Überlegungen nicht erheblich beschränkt, wenn man $\nu + 1 > 0$ voraussetzt.

Die Natur der Umkehrungsfunktion $u = f(\tau)$ hängt wesentlich vom Charakter der Reihen ab, die man für

$$\left(\frac{2C}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\tau}{du} = (u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}}$$

finden kann. Es liegen drei Möglichkeiten vor: Entweder entwickelt man den Ausdruck in eine gewöhnliche Potenzreihe von $u - u_0$, in der die Exponenten also positive ganze Zahlen sind und u_0 irgendeinen von Null verschiedenen endlichen Wert annehmen darf, oder die Entwicklung schreitet in der Umgebung von $u = 0$ nach Potenzen von $u^{\nu+1}$ fort, oder drittens die Reihe enthält nur die Potenzen von $\frac{1}{u^{\nu+1}}$, d. h. sie konvergiert für hinreichend große Werte von u.

Im ersten Falle ist $u^{\nu+1} = u_0^{\nu+1}\left(1 + \frac{u-u_0}{u_0}\right)^{\nu+1}$ und

$$u^{\nu+1} - c^{\nu+1} = (u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1}) + u_0^{\nu+1}\left\{a_1\frac{u-u_0}{u_0} + a_2\left(\frac{u-u_0}{u_0}\right)^2 + a_3\left(\frac{u-u_0}{u_0}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Es sei zunächst $u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1}$ von Null verschieden; dann wird

$$(u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}} = (u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}}\{1 + b_1(u-u_0) + b_2(u-u_0)^2 + b_3(u-u_0)^3 + \cdots\}.$$

Man integriert und kehrt die Reihe um; das Ergebnis ist

$$u = u_0 + c_1(\tau - \tau_0) + c_2(\tau-\tau_0)^2 + c_3(\tau-\tau_0)^3 + \cdots. \tag{80a}$$

Genügt aber u_0 der Gleichung $u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1} = 0$, so erhält man die Reihe

$$u = u_0 + c_1(\tau-\tau_0)^2 + c_2(\tau-\tau_0)^4 + c_3(\tau-\tau_0)^6 + \cdots,$$

die sich von der vorigen dadurch unterscheidet, daß in ihr nur die Potenzen mit geradem Exponenten auftreten. Bei der Berechnung von R_1 und y ist es zweckmäßig, den Parameter t durch τ auszudrücken, d. h. man setzt

$$R_1 = \beta\tau^{\frac{2}{\nu-1}}u, \qquad y = \frac{\nu-1}{\nu+3}\,\tau\frac{dR_1}{d\tau}.$$

Wenn $u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1} \neq 0$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} R_1 &= \tau^{\frac{2}{\nu-1}}\{\alpha_0 + \alpha_1(\tau-\tau_0) + \alpha_2(\tau-\tau_0)^2 + \alpha_3(\tau-\tau_0)^3 + \cdots\}, \\ y &= \tau^{\frac{2}{\nu-1}}\{\beta_0 + \beta_1(\tau-\tau_0) + \beta_2(\tau-\tau_0)^2 + \beta_3(\tau-\tau_0)^3 + \cdots\}, \end{aligned} \tag{80b}$$

und Entwicklungen von ähnlicher Form entstehen auch, wenn $u_0^{\nu+1} - c^{\nu+1} = 0$ ist.

Im zweiten Falle kann man

$$(u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}} = -ic^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\left\{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^{\nu+1}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

schreiben und für hinreichend kleine Werte von u nach Potenzen von $u^{\nu+1}$ entwickeln, wo $\nu + 1$ positiv ist, wie oben festgesetzt wurde; man erhält

$$(u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}} = -ic^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\{1 + a_1u^{\nu+1} + a_2u^{2(\nu+1)} + a_3u^{3(\nu+1)} + \cdots\}.$$

Die Integration gibt im allgemeinen eine Reihe von folgender Gestalt:

$$\int (u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}}\,du = -ic^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\,u\left\{1 + \frac{a_1}{\nu+2}u^{\nu+1} + \frac{a_2}{2\nu+3}u^{2(\nu+1)} + \frac{a_3}{3\nu+4}u^{3(\nu+1)} + \cdots\right\}.$$

Unter den erwähnten Voraussetzungen ist keiner der Exponenten gleich -1; es konnten deshalb bei der Integration auch keine logarithmischen Glieder erscheinen. Man setze vorübergehend zur Abkürzung $u^{\nu+1} = u_*$; dann wird

$$u_*^{\frac{1}{\nu+1}}\left\{1 + \frac{a_1}{\nu+2}u_* + \frac{a_2}{2\nu+3}u_*^2 + \frac{a_3}{3\nu+4}u_*^3 + \cdots\right\} = c_*(\tau - \tau_0),$$

wo c_* eine Konstante bedeutet. Wenn man mit dem Exponenten $\nu+1$ potenziert, ist

$$u_*\{1 + b_1u_* + b_2u_*^2 + b_3u_*^3 + \cdots\} = c_*^{\nu+1}(\tau - \tau_0)^{\nu+1}.$$

Die Umkehrung liefert

$$u_* = c_0(\tau - \tau_0)^{\nu+1} + c_1(\tau - \tau_0)^{2(\nu+1)} + c_2(\tau - \tau_0)^{3(\nu+1)} + \cdots;$$

endlich hat man auf beiden Seiten noch die $(\nu+1)$-te Wurzel zu ziehen, woraus

$$(81\,a)\quad u = (\tau - \tau_0)\{k_0 + k_1(\tau - \tau_0)^{\nu+1} + k_2(\tau - \tau_0)^{2(\nu+1)} + k_3(\tau - \tau_0)^{3(\nu+1)} + \cdots\}$$

und weiter

$$(81\,b)\quad \begin{cases} R_1 = \tau^{\frac{2}{\nu-1}}(\tau - \tau_0)\{\alpha_0 + \alpha_1(\tau - \tau_0)^{\nu+1} + \alpha_2(\tau - \tau_0)^{2(\nu+1)} + \alpha_3(\tau - \tau_0)^{3(\nu+1)} + \cdots\}, \\ y = \tau^{\frac{2}{\nu-1}}(\tau - \tau_0)\{\beta_0 + \beta_1(\tau - \tau_0)^{\nu+1} + \beta_2(\tau - \tau_0)^{2(\nu+1)} + \beta_3(\tau - \tau_0)^{3(\nu+1)} + \cdots\} \\ \qquad + \tau^{\frac{2}{\nu-1}}\tau_0\{\gamma_0 + \gamma_1(\tau - \tau_0)^{\nu+1} + \gamma_2(\tau - \tau_0)^{2(\nu+1)} + \gamma_3(\tau - \tau_0)^{3(\nu+1)} + \cdots\} \end{cases}$$

folgt.

Im dritten Falle wird $(u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}} = u^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}\left\{1 - \left(\frac{c}{u}\right)^{\nu+1}\right\}^{-\frac{1}{2}}$ in die Reihe

$$(u^{\nu+1} - c^{\nu+1})^{-\frac{1}{2}} = u^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} + a_1u^{-\frac{3}{2}(\nu+1)} + a_2u^{-\frac{5}{2}(\nu+1)} + a_3u^{-\frac{7}{2}(\nu+1)} + \cdots$$

entwickelt, welche für hinreichend große Werte von u konvergiert. Bei der Integration hat man zu beachten, ob einer der Exponenten gleich -1 wird. Das ist möglich, wenn $\nu + 1 = \frac{2}{2m+1}$ ist, wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet. Die Folge wäre das Auftreten eines logarithmischen Gliedes. Da eine solche Annahme zu weitläufigen Diskussionen führen würde, soll sie bei den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen werden. Es ergibt sich daher die Gleichung

$$u^{-\frac{1}{2}(\nu-1)}\{b_0 + b_1u^{-(\nu+1)} + b_2u^{-2(\nu+1)} + b_3u^{-3(\nu+1)} + \cdots\} = c_*(\tau - \tau_0),$$

c_* eine Konstante. Schreibt man zur Abkürzung $u^{-(\nu+1)} = u_*$, so nimmt die Reihe die Form

$$u_*^{\frac{\nu-1}{2(\nu+1)}}\{b_0 + b_1u_* + b_2u_*^2 + b_3u_*^3 + \cdots\} = c_*(\tau - \tau_0)$$

an, und wenn man mit dem Exponenten $\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}$ potenziert,

$$u_*\{c_0 + c_1u_* + c_2u_*^2 + c_3u_*^3 + \cdots\} = c_*^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}}(\tau - \tau_0)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}}.$$

Durch Umkehrung gelangt man zu der Funktion u_*, die man noch mit dem Exponenten $-\frac{1}{\nu+1}$ zu potenzieren hat. Das Ergebnis ist

$$(82\,a)\quad u = (\tau - \tau_0)^{-\frac{2}{\nu-1}}\{k_0 + k_1(\tau - \tau_0)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + k_2(\tau - \tau_0)^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + k_3(\tau - \tau_0)^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\}.$$

Für R_1 und y findet man schließlich

$$(82\text{b}) \quad \begin{cases} R_1 = \left(\dfrac{\tau}{\tau-\tau_0}\right)^{\frac{2}{\nu-1}} \{\alpha_0 + \alpha_1(\tau-\tau_0)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + \alpha_2(\tau-\tau_0)^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + \alpha_3(\tau-\tau_0)^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\}, \\ y = \tau^{\frac{2}{\nu-1}}(\tau-\tau_0)^{\frac{2\nu}{\nu-1}} \{\beta_0 + \beta_1(\tau-\tau_0)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + \beta_2(\tau-\tau_0)^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + \beta_3(\tau-\tau_0)^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\} \\ + \tau^{\frac{2}{\nu-1}}(\tau-\tau_0)^{-\frac{\nu+1}{\nu-1}} \tau_0\{\gamma_0 + \gamma_1(\tau-\tau_0)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + \gamma_2(\tau-\tau_0)^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + \gamma_3(\tau-\tau_0)^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\}. \end{cases}$$

Über die Konvergenz aller dieser Reihen läßt sich folgendes aussagen: Die Entwicklungen (80a) und (80b) konvergieren stets, wenn der absolute Betrag von $\tau - \tau_0$ hinreichend klein ist; dasselbe gilt von den Ausdrücken (81a) und (81b), da ja $\nu + 1 > 0$ vorausgesetzt wurde. Dagegen genügt diese Annahme noch nicht für die Konvergenz der Reihen (82a) und (82b); wenn letztere einen Sinn haben sollen, muß $\nu > 1$ sein. — Im allgemeinen sind die Exponenten $\nu + 1$, $\dfrac{2}{\nu-1}$, $\dfrac{2(\nu+1)}{\nu-1}$ keine ganzen Zahlen; daraus folgt, daß für die Funktionen u und R_1 der willkürliche Wert τ_0 ein Verzweigungspunkt ist, daß also die zugehörigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht in jenem Typus enthalten sind, dessen Integrale nur feste Verzweigungsstellen besitzen. Neben diesen Singularitäten können natürlich auch Pole auftreten, welche sich mit den Anfangswerten τ_0 verschieben.

Die bisherigen Untersuchungen hinsichtlich der Funktion u von τ sind insofern unvollständig, als sie sich auf die Umgebung einer im Endlichen gelegenen Stelle τ_0 beschränken. Man kann die Frage aufwerfen, ob es nicht Reihen gibt, die nach Potenzen von $\left(\dfrac{1}{\tau}\right)^m$ fortschreiten, wo m eine positive Zahl ist, d. h. Reihen, die in der Umgebung von $\tau = \infty$ konvergieren. Wenn man wieder an der Voraussetzung $\nu + 1 > 0$ festhält, hat man in der Tat eine solche Entwicklung für den oben erwähnten dritten Fall. Man erhält nämlich

$$(83\text{a}) \qquad u = \tau^{-\frac{2}{\nu-1}} \{k_0 + k_1\tau^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + k_2\tau^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + k_3\tau^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\},$$

$$(83\text{b}) \quad \begin{cases} R_1 = \alpha_0 + \alpha_1\tau^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + \alpha_2\tau^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + \alpha_3\tau^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots, \\ y = \tau^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} \{\beta_0 + \beta_1\tau^{\frac{2(\nu+1)}{\nu-1}} + \beta_2\tau^{\frac{4(\nu+1)}{\nu-1}} + \beta_3\tau^{\frac{6(\nu+1)}{\nu-1}} + \cdots\}, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke konvergieren für große Werte von τ, wenn ν zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt.

Einige interessante Beispiele mögen besonders hervorgehoben werden. Ist $\nu + 1$ gleich 3 oder 4, so ist u eine elliptische Funktion von τ. Die in Betracht kommenden Reihen (80a) bis (82b) enthalten nur solche Potenzen von τ und $\tau - \tau_0$, deren Exponenten ganze Zahlen sind. Daraus folgt, daß in diesem Falle die Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dR_1} = s + y$$

in der Weise integriert werden kann, daß man sowohl die Funktion als auch die Veränderliche als *eindeutige* Funktionen des Parameters τ darstellt.

Es sei $\nu + 1 = 6$; die Formeln (78) und (79) zeigen dann, daß die Substitution $u = c\left(\dfrac{c_1}{u_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ die Gleichung

$$\frac{du}{\sqrt{u^6 - c^6}} = \frac{1}{2}\, i c^{-2}\, c_1^{\frac{1}{2}} \frac{du_1}{\sqrt{u_1^3 - c_1^3}} = \left(\frac{1}{3}C\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

nach sich zieht. Statt also das hyperelliptische Integral, welches zum Exponenten 6 gehört, umzukehren, kann man diese Operation auf ein elliptisches Integral anwenden und zunächst u_1 als Funktion von τ bestimmen. Infolgedessen läßt sich auch u durch die $\wp$-Funktion darstellen, allerdings nicht in eindeutiger Form. Man findet nämlich

$$u = K_1\{\wp[K(\tau - \tau_0)]\}^{-\frac{1}{2}},\quad R_1 = \beta K_1 \tau^{\frac{1}{2}}\{\wp[K(\tau - \tau_0)]\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Größen K und K_1 berechnet man leicht aus den Konstanten C, c und c_1; die beiden Invarianten, welche in der Weierstraßschen Normalform des elliptischen Integrals auftreten, haben die Werte $g_2 = 0$ und $g_3 = c_1^3$.

Man gelangt zu einer Klasse algebraisch integrierbarer Differentialgleichungen, wenn man annimmt, daß $\nu + 1 = \frac{1}{m}$ ist, m eine positive ganze Zahl größer als Eins. In diesem Falle wird

$$\frac{du}{\sqrt{u^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}}} = \sqrt{2Cm}\, d\tau.$$

Eine neue Variable v möge der Gleichung $v^2 = u^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}$ genügen; dann erhält man v als Funktion von τ aus

$$(v^2 + c^{\frac{1}{m}})^{m-1}\, dv = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2C}{m}}\, d\tau\,.$$

Nach der Integration erscheint auf der linken Seite eine ganze Funktion vom Grade $2m - 1$; sämtliche Exponenten der Potenzen von v sind ungerade Zahlen; die Koeffizienten ermittelt man ohne Schwierigkeiten aus den Binomialfaktoren. Das Ergebnis ist die Gleichung

$$v^{2m-1} + a_1 v^{2m-3} + a_2 v^{2m-5} + \cdots + a_{m-1} v = \frac{2m-1}{2}\sqrt{\frac{2C}{m}}\,(\tau - \tau_0)\,.$$

Hat man die algebraische Funktion v gefunden, so wird

$$u = (v^2 + c^{\frac{1}{m}})^m.$$

R_1 und y sind gleichfalls algebraische Funktionen von τ.

3. Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + 3n_2 y^2 + 2y^3(n_1^2 x^2 - n_2^2 x) = 0,\ n_1 \text{ und } n_2 \text{ Konstanten},$$

welche R. Liouville[6]) zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung gemacht hat, zeichnet sich dadurch aus, daß sie durch die rationalen Transformationen

$$\frac{1}{y} + n_1 x^2 - n_2 x = 2n_1 x_1^2, \qquad \frac{1}{x_1 y_1} = n_1 x + n_2$$

in sich selbst übergeht, d. h. also, daß die Gleichung zwischen y_1 und x_1 genau dieselbe Form hat wie die gegebene. Man kann daraus leicht eine andere, nämlich $\frac{dz}{dR_1} = z^2 - sz^3$ erhalten, wo $s = -\frac{2}{9}(R_1 - R_1^3)$ ist, und diese gehört dem zuletzt behandelten Typus an, wenn man $\nu = 3$ und $\gamma = -\frac{2}{9}$ setzt[7]). Die Integration führt auf elliptische Funktio-

[6]) R. Liouville, Sur une équation différentielle du premier ordre, Acta Mathematica **27** (1903), p. 55—78.

[7]) H. Lemke, Über eine von R. Liouville untersuchte Differentialgleichung erster Ordnung, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **18** (1920), S. 26—31.

nen, und den oben genannten rationalen Substitutionen entsprechen gewisse Transformationen, durch welche das elliptische Differential

$$\frac{du}{\sqrt{u^4 - c^4}}$$

in ein anderes von ähnlicher Gestalt verwandelt wird. Es liegt nahe, dieses Ergebnis zu verallgemeinern, aber den umgekehrten Weg einzuschlagen, also von Substitutionen $u = \varphi(u_1)$ auszugehen, welche das Differential

$$\frac{du}{\sqrt{u^\lambda - c^\lambda}} \quad \text{in} \quad \frac{1}{A}\frac{du_1}{\sqrt{u_1^{\lambda_1} - c_1^{\lambda_1}}}, \quad A \text{ eine Konstante,}$$

überführen, und die entsprechenden Transformationen für die Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dR_1} = s + y, \qquad s = -\frac{2\lambda}{(\lambda+2)^2}(R_1 - R_1^{\lambda-1}),$$

aufzusuchen.

Der Exponent λ, welcher in den letzten Formeln auftritt, ist nichts anderes als die Konstante, die früher mit $\nu + 1$ bezeichnet wurde; außerdem soll die Größe C, die in (77) vorkam, so gewählt werden, daß $2C = \nu + 1 = \lambda$ ist; man kann dies stets erreichen, da C von der Konstante β abhängig ist, über die man frei verfügen darf. Unter dieser Voraussetzung besteht die Gleichung

$$\frac{du}{\sqrt{u^\lambda - c^\lambda}} = \frac{1}{A}\frac{du_1}{\sqrt{u_1^{\lambda_1} - c_1^{\lambda_1}}} = d\tau\,.$$

Man definiert nun zwei neue Funktionen v und v_1, indem man

$$v = \sqrt{u^\lambda - c^\lambda}, \qquad v_1 = \sqrt{u_1^{\lambda_1} - c_1^{\lambda_1}}$$

setzt; dann ist

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2}\lambda u^{\lambda-1} \quad \text{und} \quad \frac{du_1}{d\tau} = Av_1, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{2}\lambda_1 A u_1^{\lambda_1-1}$$

Man erhält daher den Satz:

Ist $u = \varphi(u_1)$ eine Transformation von der oben angegebenen Beschaffenheit, so wird durch die Substitutionen

$$u = \varphi(u_1), \qquad v^2 = \varphi^\lambda - c^\lambda \tag{84}$$

das System der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2}\lambda u^{\lambda-1} \tag{85a}$$

in das System

$$\frac{du_1}{d\tau} = Av_1, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{2}\lambda_1 A u_1^{\lambda_1-1} \tag{85b}$$

verwandelt.

Die schon in einem anderen Zusammenhange benutzte Relation (78) liefert ein einfaches Beispiel für eine Funktion $u = \varphi(u_1)$, wie sie hier gebraucht wird. Es ist

$$u = c\left(\frac{c_1}{u_1}\right)^{\frac{2}{\lambda-2}},$$

und aus (79) folgt

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda}{\lambda-2}, \qquad A = \frac{2-\lambda}{2}\, c^{\frac{\lambda-2}{2}}\, c_1^{\frac{2}{2-\lambda}}\, i\,.$$

Man kann den beiden Funktionen u und v von u_1 und v_1 durch eine einfache Umformung die folgende Gestalt geben:

$$u^\lambda = c^\lambda \left(\frac{c_1}{u_1}\right)^{\lambda_1}, \qquad v^2 = -\, c^\lambda \frac{v_1^2}{u_1^{\lambda_1}},$$

und diese Substitutionen, welche die beiden Systeme von Differentialgleichungen in einander überführen, haben außerdem die Eigenschaft, daß sie den Ausdruck

$$\frac{v^4}{c^\lambda u^\lambda} \text{ in } \frac{v_1^4}{c_1^{\lambda_1} u_1^{\lambda_1}}$$

verwandeln.

Die Transformationen enthalten die Konstanten c und c_1, welche in den Differentialgleichungen, abgesehen von der Größe A, nirgends auftreten. Es sollen daher neue Substitutionen hergestellt werden, die nur von A, aber nicht von c und c_1 abhängen. Man setzt zu diesem Zwecke

$$c^\lambda = u^\lambda - v^2, \; c_1^{\lambda_1} = u_1^{\lambda_1} - v_1^2.$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\frac{2}{2-\lambda} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda-2}{2} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ ist, wird zunächst

$$A = -\frac{\lambda}{\lambda_1} c^{\frac{\lambda}{\lambda_1}} c_1^{-\frac{\lambda_1}{\lambda}} i = -\frac{\lambda i}{\lambda_1} (u^\lambda - v^2)^{\frac{1}{\lambda_1}} (u_1^{\lambda_1} - v_1^2)^{-\frac{1}{\lambda}},$$

woraus

$$u^\lambda - v^2 = \left(\frac{\lambda_1 A i}{\lambda}\right)^{\lambda_1} (u_1^{\lambda_1} - v_1^2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}$$

folgt; andererseits ist

$$u^\lambda u_1^{\lambda_1} = c^\lambda c_1^{\lambda_1} = (u^\lambda - v^2)\,(u_1^{\lambda_1} - v_1^2),$$

und hieraus ergibt sich

$$u^\lambda = -\frac{v^2}{v_1^2}(u_1^{\lambda_1} - v_1^2).$$

Das sind zwei Gleichungen, aus denen sich u^λ und v^2 berechnen lassen:

$$(86) \qquad \begin{cases} u^\lambda = \left(\frac{\lambda_1 A i}{\lambda}\right)^{\lambda_1} u_1^{-\lambda_1} (u_1^{\lambda_1} - v_1^2)^{\frac{\lambda_1}{2}}, \\ v^2 = -\left(\frac{\lambda_1 A i}{\lambda}\right)^{\lambda_1} u_1^{-\lambda_1} v_1^2 (u_1^{\lambda_1} - v_1^2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda}}, \end{cases}$$

und wenn man auf eine symmetrische Form Wert legt, erhält man schließlich

$$(87) \qquad \begin{cases} (u^\lambda - v^2)^\lambda = \left(\frac{\lambda_1 A i}{\lambda}\right)^{\lambda\lambda_1} (u_1^{\lambda_1} - v_1^2)^{\lambda_1}, \\ \frac{u^\lambda}{v^2} + \frac{u_1^{\lambda_1}}{v_1^2} = 1. \end{cases}$$

Den Übergang des Systems (85a) in die Differentialgleichung

$$(88) \qquad y\frac{dy}{d\xi} = y - \frac{2\lambda}{(\lambda+2)^2}(\xi - \xi^{\lambda-1})$$

vermitteln die Relationen

$$\tau = \frac{2}{\lambda-2} t^{\varepsilon'} \quad \text{mit} \quad \varepsilon' = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}, \qquad u = t^{-\frac{2}{\lambda+2}} \xi, \qquad t\frac{d\xi}{dt} = y.$$

Hier ist aus Gründen der Übersichtlichkeit an Stelle der früher mit R_1 bezeichneten Veränderlichen ξ geschrieben worden. — Ebenso resultiert aus dem System (85b) die Gleichung

$$y_1 \frac{dy_1}{d\xi_1} = y_1 - \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1+2)^2}(\xi_1 - \xi_1^{\lambda_1-1}), \quad \lambda_1 = \frac{2\lambda}{\lambda-2}, \tag{88a}$$

vorausgesetzt daß

$$\tau = \frac{2}{(\lambda_1-2)A} t_1^{\varepsilon_1'} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_1' = \frac{\lambda_1-2}{\lambda_1+2}, \qquad u_1 = t_1^{-\frac{2}{\lambda_1+2}} \xi_1, \qquad t_1 \frac{d\xi_1}{dt_1} = y_1$$

gesetzt wird. Die Variablen t und t_1 sind nicht von einander unabhängig; es ist nämlich

$$t^{-\frac{1}{\lambda_1-1}} = \frac{(\lambda_1-2)A}{\lambda-2} t_1^{-\frac{1}{\lambda-1}}.$$

Man muß noch die Funktionen $v = \dfrac{du}{d\tau}$ und $v_1 = \dfrac{1}{A}\dfrac{du_1}{d\tau}$ berechnen, indem man die oben mitgeteilten Ausdrücke für τ, u, y, u_1, y_1 benutzt. Das Ergebnis ist

$$v = t^{-\frac{\lambda}{\lambda+2}}\left\{\frac{1}{2}(\lambda+2)y - \xi\right\}, \qquad v_1 = t_1^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2}}\left\{\frac{1}{2}(\lambda_1+2)y_1 - \xi_1\right\}.$$

Wenn man nun die u, v, u_1, v_1, so wie sie hier gefunden wurden, in die Relationen (87) einführt, heben sich die Potenzen von t und t_1 und außerdem die Konstante A heraus, und man erhält die gesuchten Transformationen

$$\left\{\xi^\lambda - \left(\frac{\lambda+2}{2}y - \xi\right)^2\right\}^\lambda = \left(\frac{\lambda i}{\lambda_1}\right)^{\lambda\lambda_1}\left\{\xi_1^{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_1+2}{2}y_1 - \xi_1\right)^2\right\}^{\lambda_1},$$

$$\frac{\xi^\lambda}{\left(\frac{\lambda+2}{2}y - \xi\right)^2} + \frac{\xi_1^{\lambda_1}}{\left(\frac{\lambda_1+2}{2}y_1 - \xi_1\right)^2} = 1, \quad \lambda_1 = \frac{2\lambda}{\lambda-2}, \tag{89}$$

welche die Differentialgleichungen (88) und (88a) ineinander verwandeln.

Der besondere Fall $\lambda = \lambda_1 = 4$ verdient eine besondere Beachtung, weil sich dann Substitutionen und Differentialgleichungen erheblich vereinfachen. Man gelangt zu folgendem Resultat: Ermittelt man ξ und y als Funktionen von ξ_1 und y_1 aus den Relationen

$$\xi^2 = \left(\frac{3y_1}{\xi_1} - 1 + \xi_1\right)\left(\frac{3y_1}{\xi_1} - 1 - \xi_1\right), \qquad \frac{3y}{\xi} - 1 = -\left(\frac{3y_1}{\xi_1} - 1\right),$$

so wird dadurch die Gleichung

$$y\frac{dy}{d\xi} = y - \frac{2}{9}(\xi - \xi^3) \tag{90}$$

in sich selbst transformiert. — Diese Substitution ist übrigens nicht die einzige von der angegebenen Beschaffenheit; so wird z. B. das System

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = 2u^3$$

ungeändert gelassen, wenn man an Stelle von u und v zwei neue Funktionen u_1 und v_1 einführt, indem man

$$2u_1^2 = u^2 + \alpha v, \qquad v_1 = \alpha u u_1, \qquad \alpha = \pm 1,$$

setzt. Die entsprechenden Transformationen der Gleichung (90) stimmen im wesentlichen mit denjenigen überein, die R. Liouville angegeben hat. Näheres findet man in der oben zitierten Arbeit [7]).

Unter den zahlreichen Transformationen, die in diesem Zusammenhange behandelt werden könnten, sei noch eine erwähnt, welche sich auf das elliptische Differential

$$\frac{du}{\sqrt{u^3 - c^3}} = d\tau$$

bezieht. Setzt man nämlich

$$u = u_1 - \frac{4c_1^3}{u_1^2}, \qquad c_1^3 = -\left(\frac{c}{3}\right)^3, \tag{91}$$

so hat man zunächst

$$u^3 - c^3 = (u_1^3 - c_1^3)\left(1 + \frac{8c_1^3}{u_1^3}\right)^2, \qquad du = \left(1 + \frac{8c_1^3}{u_1^3}\right) du_1,$$

woraus

$$\frac{du}{\sqrt{u^3 - c^3}} = \frac{du_1}{\sqrt{u_1^3 - c_1^3}} = d\tau \tag{92}$$

folgt. Das elliptische Differential ist also in ein anderes von derselben Form übergegangen; nur ist die Konstante c^3 auf einen Bruchteil ihres ursprünglichen Betrages reduziert worden. Wenn man eine Reihe von Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bildet, welche untereinander durch die Formeln

$$u_k = u_{k+1} - \frac{4c_{k+1}^3}{u_{k+1}^2}, \qquad c_{k+1}^3 = -\left(\frac{c_k}{3}\right)^3,$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ verbunden sind, so gelangt man zu Differentialen, in denen die absoluten Beträge der Konstante c_{k+1}^3 unter jeden noch so kleinen Wert heruntersinken.

Es sei $v = \sqrt{u^3 - c^3}$ und $v_1 = \sqrt{u_1^3 - c_1^3}$; dann gibt es Transformationen, die das System

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{3}{2}u^2$$

in das System

$$\frac{du_1}{d\tau} = v_1, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{3}{2}u_1^2$$

überführen. Die eine dieser Gleichungen findet man, wenn man in (91) an Stelle von c_1^3 den Ausdruck $u_1^3 - v_1^2$ substituiert; die andere dagegen, indem man $v = \frac{du}{d\tau}$ herstellt. Als Ergebnis erhält man die Formeln

$$u = -3u_1 + \frac{4v_1^2}{u_1^2}, \qquad v = 9v_1 - \frac{8v_1^3}{u_1^3}. \tag{93}$$

Da die Relation

$$v_1^2 - u_1^3 = -\frac{1}{27}(v^2 - u^3) \tag{94}$$

besteht, gilt folgender Satz:

Betrachtet man u und v als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Neilschen Parabel $v^2 - u^3 = 0$, so geht dieser durch die Transformationen (93) *wiederum in einen Punkt derselben Kurve über.*

Es sei P_0 ein Doppelpunkt jener Substitutionen, es unterliegen also die Koordinaten desselben der Bedingung $u = u_1$ und $v = v_1$, dann ergibt sich aus (93), daß $v^2 - u^3 = 0$ ist, d. h. jeder Punkt, welcher in sich selbst transformiert wird, liegt auf der Neilschen Parabel. Die Größen u und v sind eindeutige Funktionen von u_1 und v_1; wenn aber

umgekehrt u und v gegeben sind, muß man z. B. u_1 aus der kubischen Gleichung

$$u_1^3 - uu_1^2 - \frac{4}{27}(v^2 - u^3) = 0$$

berechnen, deren Diskriminante den Wert $D = -\frac{16}{27} v^2(v^2 - u^3)$ hat.

Den Übergang des Systems $\frac{du}{d\tau} = v$, $\frac{dv}{d\tau} = \frac{3}{2} u^2$ zu der Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{d\xi} = y - \frac{6}{25}(\xi - \xi^2) \tag{95}$$

bewirken die Formeln

$$\tau = 2t^{\frac{1}{5}}, \quad u = t^{-\frac{2}{5}}\xi, \quad v = t^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{5}{2}y - \xi\right), \quad t\frac{d\xi}{dt} = y, \tag{96}$$

und ebenso erhält man aus dem System $\frac{du_1}{d\tau} = v_1$, $\frac{dv_1}{dt} = \frac{3}{2} u_1^2$ die Gleichung

$$y_1\frac{dy_1}{d\xi_1} = y_1 - \frac{6}{25}(\xi_1 - \xi_1^2), \tag{95a}$$

wenn man

$$\tau = 2t^{\frac{1}{5}}, \quad u_1 = t^{-\frac{2}{5}}\xi_1, \quad v_1 = t^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{5}{2}y_1 - \xi_1\right), \quad t\frac{d\xi_1}{dt} = y_1 \tag{96a}$$

setzt. Es lassen sich nun leicht die Relationen angeben, welche die beiden Differentialgleichungen ineinander verwandeln; man hat nur nötig, in (93) die Ausdrücke (96) und (96a) einzuführen; dann wird

$$\begin{cases} \xi = -3\xi_1 + \left(\frac{5y_1}{\xi_1} - 2\right)^2, \\ 5y - 2\xi = 9(5y_1 - 2\xi_1) - 2\left(\frac{5y_1}{\xi_1} - 2\right)^3. \end{cases} \tag{97}$$

In derselben Weise ergibt sich aus (94):

$$(5y_1 - 2\xi_1)^2 - 4\xi_1^3 = -\frac{1}{27}\{(5y - 2\xi)^2 - 4\xi^3\}.$$

Es existiert auch hier eine algebraische Kurve dritten Grades,

$$(5y - 2\xi)^2 = 4\xi^3,$$

deren sämtliche Punkte in sich selbst transformiert werden. Berechnet man daraus $y = \frac{2}{5}\xi(1 \pm \xi^{\frac{1}{2}})$, so sind das zwei partikuläre Lösungen der Gleichung (95). —

In diesem Zusammenhange ist es angebracht, die merkwürdige von R. Liouville [8]) mitgeteilte Differentialgleichung

$$y'' - \alpha y^3 - \frac{y}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{7\alpha'^2}{\alpha^2}\right) = 0$$

zu besprechen, in welcher α eine *willkürliche* Funktion der unabhängigen Variablen x ist. Sie soll in sich selbst transformiert werden, wenn man y durch eine neue Unbekannte y_1 ersetzt, die der Bedingung

$$y' + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\, y^2 + \frac{\alpha'}{6\alpha} y = y_1^2\sqrt{\alpha}$$

[8]) A. a. O. [6]), S. 71.

genügt. Diese Angabe bedarf, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, einer kleinen Korrektur. Die Differentialgleichung heißt vielmehr

$$y'' - \alpha y^3 + \frac{y}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{7\alpha'^2}{6\alpha^2}\right) = 0, \tag{98}$$

und die beiden Funktionen y und y_1 sind durch die Relation

$$y' + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\, y^2 + \frac{\alpha'}{6\alpha} y = y_1^2 \sqrt{2\alpha} \tag{99}$$

miteinander verbunden. Das allgemeine Integral von (98), welches Liouville nicht mitteilt, kann man folgendermaßen finden: Man definiere zwei neue Funktionen u und τ, indem man

$$y = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} u, \quad \frac{d\tau}{dx} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{100}$$

setzt; dann ist

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = 2u^3, \tag{101}$$

und u läßt sich als elliptische Funktion von τ darstellen, wenn man das Integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^4 - c^4}} = \tau - \tau_0$$

umkehrt.

Der Gleichung (99) sind gewisse Substitutionen zugeordnet, welche (101) oder, was auf dasselbe hinausläuft, das System

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = 2u^3 \tag{102}$$

in sich selbst transformieren. Führt man nämlich die Ausdrücke (100) für y und $\frac{d\tau}{dx}$ in (99) ein, so erhält man zunächst

$$\frac{du}{d\tau} + u^2 = 2u_1^2,$$

wo die Funktion u_1 mit y_1 durch die Relation

$$y_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} u_1$$

zusammenhängt. Die Gleichung $2u_1^2 = u^2 + v$ differenziert man noch einmal, indem man berücksichtigt, daß

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = 2u^3, \quad \frac{du_1}{d\tau} = v_1$$

ist. Das Ergebnis ist $v_1 = uu_1$. Es wird also durch die Transformationen

$$2u_1^2 = u^2 + v, \quad v_1 = uu_1$$

das System (102) in das System

$$\frac{du_1}{d\tau} = v, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = 2u_1^3$$

verwandelt. Das ist aber, wie schon an einer früheren Stelle hervorgehoben wurde, eine bekannte Tatsache.

Eingegangen 20. Oktober 1938.